Date . . No. 1

冷却原子 (cold atoms)

→ 系を自由にデザインしコントロールできる

利点

- 相互作用 (フェッシュバッハ共鳴)
- 空間次元 (光格子)
- 量子統計、成分数、質量比 (原子種)

→ 何ができるか?

└ 前半：多体系

BCS-BEC クロスオーバーとユニタリーフェルミ気体

(3D, フェルミ粒子2成分)

└ 後半：少数系

エフィモフ効果 (3D, ボース粒子)

スーパーエフィモフ効果 (2D, フェルミ粒子)

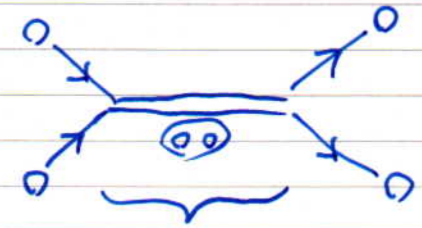
方法
- 場の理論
- 対称性
- 厳密解
- くりこみ群

以下、 $\hbar=1$ $k_B=1$

ただし、$c=1$ でない!

☆ フェッシュバッハ共鳴

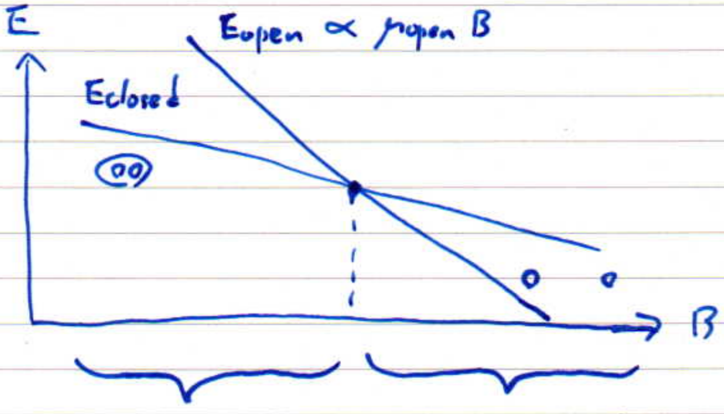
2原子の散乱

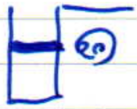


仮想分子を形成

open channel　　closed channel

磁気モーメント $\mu_{open} \neq \mu_{closed}$



分子安定 ⇕ 引力強 

分子不安定 ⇕ 引力弱 

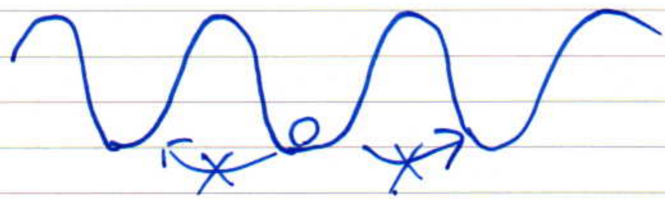
☆ 光格子

原子と光の相互作用

$\vec{E}$

分極 $\vec{d} = \alpha \vec{E}$ $\Rightarrow$ $V = -\frac{\alpha}{2}|\vec{E}|^2$

定在波



☆ 原子種

アルカリ金属 Li, Na, K, Rb, Cs

$\boxed{{}^{6}Li}$ $\quad$ ${}^{39}K$

${}^{7}Li$ $\quad$ $\boxed{{}^{40}K}$

${}^{41}K$

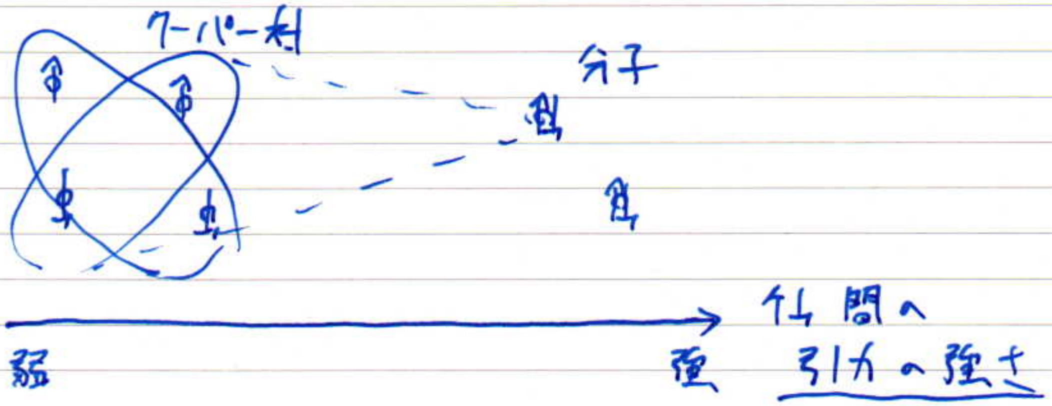
フェルミ粒子

アルカリ土類 Sr, Yb

7つの安定同位体

(ボース粒子5つ, フェルミ粒子2つ)

BCS-BEC クロスオーバー



引力の強さ ⟺ s波散乱長 a

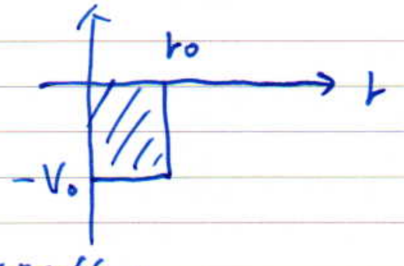
散乱振幅 $f_s(k) = \dfrac{-1}{ik - \underbrace{k\cot\delta}}$

$$k\cot\delta = -\underline{\underline{\frac{1}{a}}} + \frac{1}{2}r_{\mathrm{eff}}k^2 + \cdots$$

$$\therefore \frac{1}{a} = -\lim_{k\to 0} k\cot\delta$$

井戸型ポテンシャル

$$V(r) = -V_0\,\theta(r_0 - r)$$



引力の強さ

$V_0 = \dfrac{k_0^2}{2\mu}$

ポテンシャルのレンジ（到達距離）

Schrödinger 方程式

$$\Big[-\frac{\nabla^2}{2\mu} + V(r) \Big] \psi = \underbrace{E}_{\frac{k^2}{2\mu}} \psi$$

s 波

$$\Longrightarrow \big[-\partial_r^2 - \tfrac{2}{r}\partial_r + 2\mu V(r) \big] \psi = k^2 \psi$$

$\psi = \frac{\chi}{r}$

$$\Longrightarrow \big[-\partial_r^2 + \underbrace{2\mu V(r)}_{-u_0^2 \theta(r_0 - r)} \big] \chi = k^2 \chi$$

$$\therefore\ \chi'' = \begin{cases} -(u_0^2 + k^2)\,\chi & r < r_0 \\ -k^2 \chi & r > r_0 \end{cases}$$

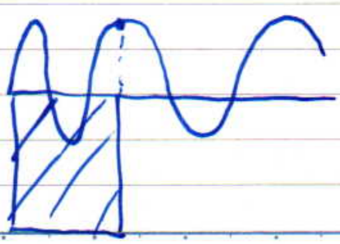
$$\Longrightarrow \begin{cases} \chi(r) \propto \sin \sqrt{u_0^2 + k^2}\, r \\ \chi(r) \propto \sin (kr + \delta) \end{cases}$$

phase shift

$$\frac{\chi'}{\chi}\Big|_{r = r_0^-} = \frac{\chi'}{\chi}\Big|_{r = r_0^+}$$

$$\Longrightarrow \sqrt{u_0^2 + k^2}\, \cot \sqrt{u_0^2 + k^2}\, r_0 = k \cot (k r_0 + \delta)$$

$$= k\, \frac{\cot k r_0 \cot \delta - 1}{\cot k r_0 + \cot \delta}$$

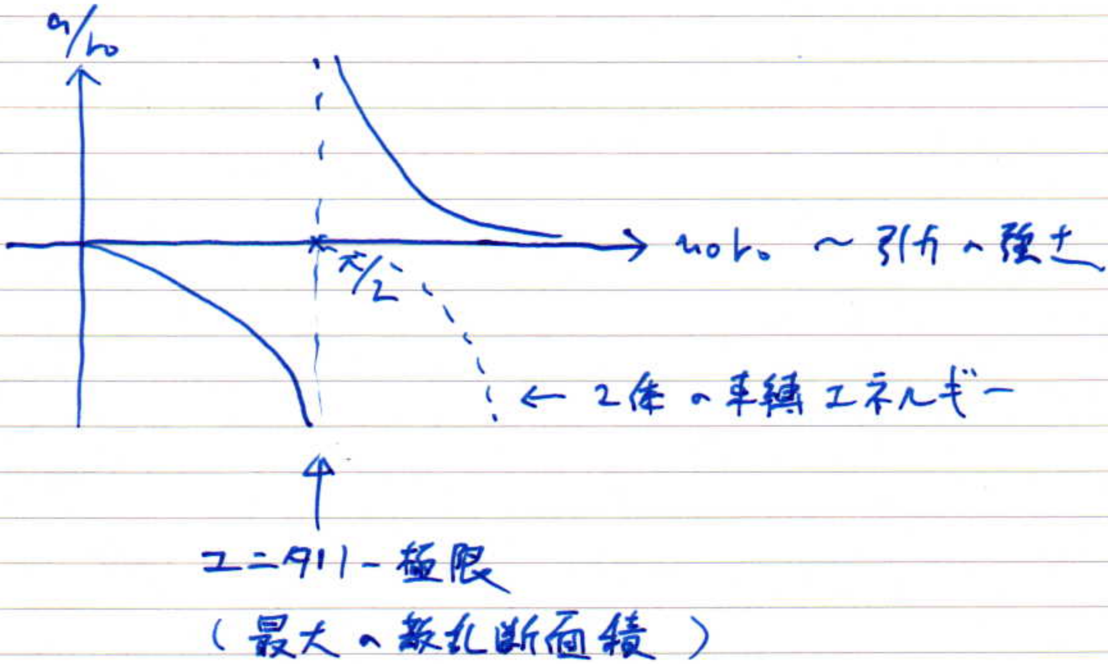


cot δ について解くと

$$k \cot \delta = - - - - .$$

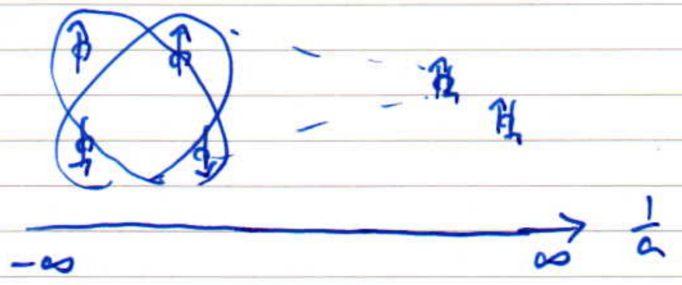
$$\xrightarrow[k \to 0]{} \frac{\kappa_0 \cot \kappa_0 r_0}{1 - \kappa_0 r_0 \cot \kappa_0 r_0} \equiv -\frac{1}{a}$$

$$\therefore \ a = r_0 - \frac{1}{\kappa_0 \cot \kappa_0 r_0} = r_0 \left(1 - \frac{\tan \kappa_0 r_0}{\kappa_0 r_0} \right)$$



引力の強さ：	弱 →	中 →	強、
a :	-0	$\pm\infty$	$+0$
$1/a$:	$-\infty$	0	$+\infty$

BCS-BEC クロスオーバー



系に存在する長さスケール

・密度n → 平均粒子間距離 $n^{-1/3}$ (~ 100 Å)

・温度T → 熱ド・ブロイ波長 $\lambda_T \sim 1/\sqrt{T}$ ($\xrightarrow[T\to 0]{} \infty$)

・相互作用 → 散乱長 a (可変)

↘ ポテンシャル・レンジ r_0 (~ 10 Å)

⇒ $r_0 \ll n^{-1/3}, \lambda_T, a$

↓ 無視できる.

0

$\boxed{\text{ゼロレンジ極限}}$

⇒ 物理の $T=0$ は $n^{-1/3}$, a だけに依存

⇒ ポテンシャルの情報消える.

⇒ 普遍性!!!

☆ ゼロレンジ極限の記述

1) 量子力学

2体 Schrödinger 方程式

$$\left[-\frac{\nabla^2}{2\mu} + V(r) \right] \psi = E \psi$$

$$\xrightarrow[r_0 \to 0]{} -\frac{\nabla^2}{2\mu} \psi = E \psi \quad \text{for } r > 0$$

$$\psi \propto \frac{\sin(kr + \delta)}{r}$$

$$\xrightarrow[kr \to 0]{} \frac{\sin \delta + kr \cos \delta}{r}$$

$$\propto \frac{1}{r} + k \cot \delta$$

$$= \underline{\frac{1}{r} - \frac{1}{a}} + \cancel{O(r)}$$

つまり、$\psi(r) \xrightarrow[r \to 0]{} \frac{1}{r} - \frac{1}{a} + O(r)$

Bethe-Peierls boundary condition.

特に、自由極限 $(a \to -0)$ $\psi \to \text{const.}$

ユニタリー極限 $(a \to \infty)$

$\psi \to \frac{1}{r}$

N体の場合も同様に

$$-\sum_{i=1}^{N}\frac{\nabla_i^2}{2m}\psi(r_1,r_2,\cdots,r_N) = E\,\psi(r_1,r_2,\cdots,r_N)$$

with B.C. $\displaystyle\lim_{|r_i-r_j|\to 0}\psi = \left(\frac{1}{|r_i-r_j|}-\frac{1}{a}\right)\underbrace{\chi(r_1,\cdots,r_N)}_{r_i,r_j\text{は除く}}$

あるいは フェルミの擬ポテンシャル

$$V(r) = \frac{2\pi a}{\mu}\,\delta(\vec{r})\,\frac{\partial}{\partial r}r$$

を用いて.

$$\left[-\frac{\nabla^2}{2\mu}+V(r)\right]\psi = E\psi \quad \text{for } r \geq 0$$

とすれば.

境界条件 $\psi|_{r\to 0} \propto \frac{1}{r}-\frac{1}{a}$ が

自動的に選ばれる.

(確認) $\displaystyle\left[-\frac{\nabla^2}{2\mu}+V(r)\right]\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}\right)$

$$= \frac{1}{2\mu}4\pi\delta(\vec{r}) + \frac{2\pi a}{\mu}\delta(\vec{r})\left(-\frac{1}{a}\right)$$

$$= 0 \quad //$$

2) 場の理論

with カットオフ Λ

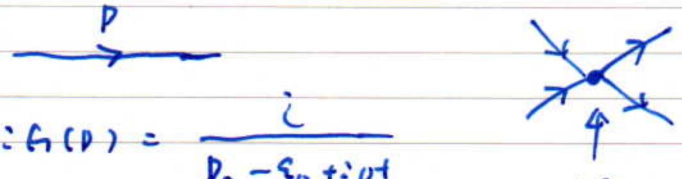
$$\mathcal{L} = \psi_a^\dagger \left(i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m}\right)\psi_a + g\, \psi_\uparrow^\dagger \psi_\downarrow^\dagger \psi_\downarrow \psi_\uparrow$$

↑ "δ関数" ポテンシャル

$$V(r) = -g\,\delta(\vec{r}_\uparrow - \vec{r}_\downarrow)$$

ファインマン・ルール

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{propagator}}$ $\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\text{vertex}}$

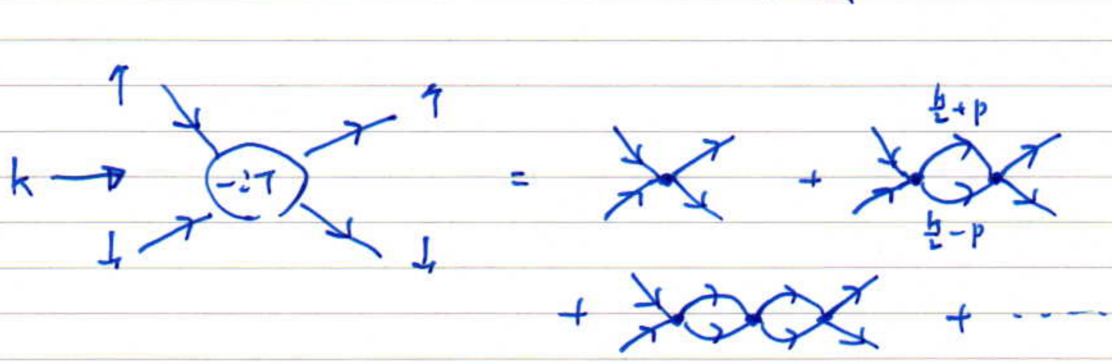


$$iG(p) = \frac{i}{p_0 - \varepsilon_p + i0^+}$$

ig

未知パラメータ Λ, g の決定

$\Leftrightarrow$ 散乱T行列 $\longleftrightarrow\ \propto \dfrac{1}{ik - \frac{1}{a}}$



$$-iT(k) = if + if\left(\int_p iG\,iG\right)if + if\underbrace{\left(\int_p iG\,iG\right)}_{\int \frac{dp_0\,d\vec{p}}{(2\pi)^4}\,iG\left(\frac{k}{2}+p\right)iG\left(\frac{k}{2}-p\right)}if\left(\int_p iG\,iG\right)if + \cdots$$

$$= \frac{if}{1 - if\left(\int_p iG\,iG\right)}$$

$$= \frac{\ast i}{\frac{1}{f} + i\int\frac{dp_0\,d\vec{p}}{(2\pi)^4}\,\frac{1}{\frac{k_0}{2}+p_0-\frac{\left(\frac{k}{2}+p\right)^2}{2m}+i0^+}\,\frac{1}{\frac{k_0}{2}-p_0-\frac{\left(\frac{k}{2}-p\right)^2}{2m}+i0^+}}$$

$$= \frac{\ast i}{\frac{1}{f} + \int\frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}\,\frac{1}{\underbrace{k_0-\frac{k^2}{4m}+i0^+}_{\text{重心運動}}\underbrace{-\frac{p^2}{m}}_{\text{相対運動}}}}$$

$$\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int_0^{\Lambda} dp\cdot p^2$$

Λ: カットオフ.

$k_0 = \frac{k'}{m}$, $\vec{k} = 0$ とおいて 積分すると

$$T(k) = \frac{-1}{\frac{1}{g} - \frac{m\Lambda}{2\pi^2} - \frac{m}{4\pi} ik + \frac{k^2}{\Lambda} + \frac{k^4}{\Lambda^3} + \cdots}$$

$$= \frac{4\pi}{m} \frac{1}{ik + \frac{4\pi}{m}\left(\frac{m\Lambda}{2\pi^2} - \frac{1}{g}\right) + \frac{k^2}{\Lambda} + \frac{k^4}{\Lambda^3} + \cdots}$$

$$\propto f(k) = \frac{-1}{ik + \frac{1}{a}}$$ とするためには

$\frac{1}{g} - \frac{m\Lambda}{2\pi^2} = -\frac{m}{4\pi a}$ を固定しながら

$\Lambda \to \infty$ ($\therefore g \to 0$) の極限をとる。

⟺ ゼロレンジ極限