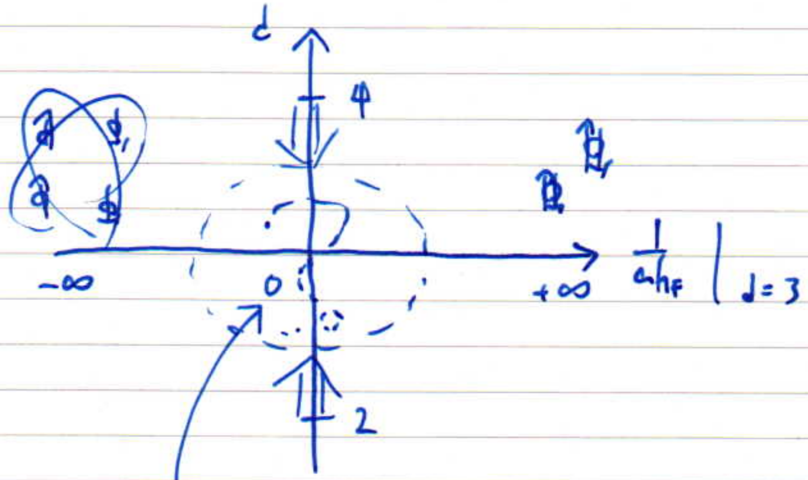
BCS-BEC クロスオーバー



フェルミ気体の ユニタリー極限
= ユニタリー・フェルミ気体

- 散乱断面積最大
  ⇒ (最)強相関量子多体系
- 密度以外にスケールがない
  ⇒ 高い対称性

d=4 と d=2 の特殊性 (Hussinov, Hussinov)

1) Bethe-Peierls boundary condition による理解

2体問題 $\underbrace{-\frac{\nabla^2}{2\mu}}\psi = E\psi$ with $\psi|_{r\to0} \to \frac{1}{r} - \underset{\searrow 0}{\cancel{\frac{1}{a}}} + O(r)$

$$\nabla^2|_{\ell=0} = \partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r$$

$$\xrightarrow[\text{一般の次元 } d]{} \quad \nabla^2|_{\ell=0} = \partial_r^2 + \frac{d-1}{r}\partial_r$$

$$\Rightarrow \psi|_{r\to0} \to \frac{1}{r^{d-2}} - \underset{\searrow 0}{\cancel{\frac{1}{a}}} + O(r^{4-d})$$

$\boxed{d\to4}$

波動関数 $\psi(r)$ の規格化積分

$$\int_0 d\vec{r}\, |\psi(r)|^2 \sim \int_0 dr \cdot r^{d-1} \left(\frac{1}{r^{d-2}}\right)^2$$

$$\sim \underbrace{\int_0 dr \frac{1}{r^{d-3}}}_{d\geq4 \text{ のとき } r=0 \text{ で発散}}$$

⇒ $d\to4$ のとき、↑と↓は局在 ⇅

⇒ ユニタリー・フェルミ気体は自由ボース気体に帰着

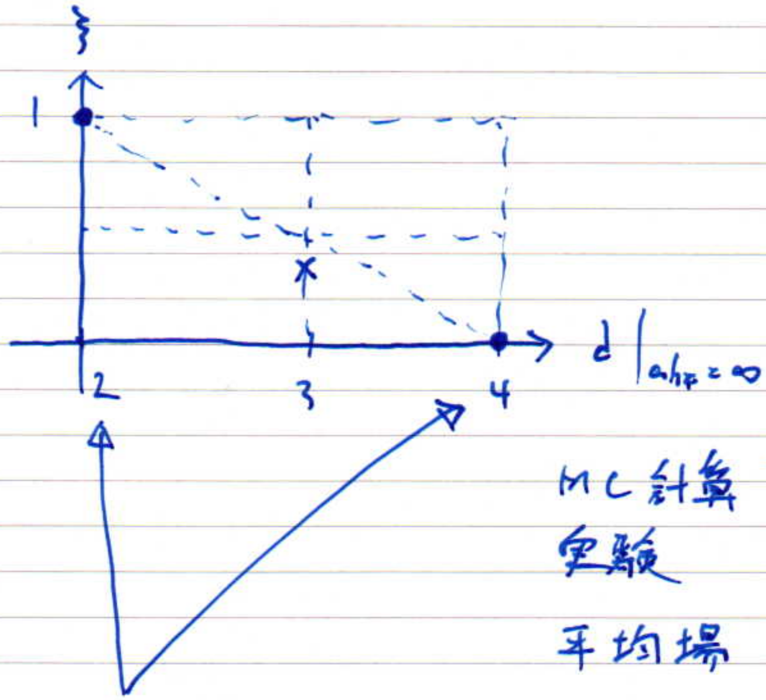
$\therefore\ \xi|_{d\to4} \to 0$!

$\boxed{d \to 2}$

波動関数 $\psi(r)\Big|_{r\to 0} \to \frac{1}{d-2} \xrightarrow[d\to 2]{} \underbrace{\text{const.}}$

$r=0$ での特異性なし
⇒ 相互作用なし

⇒ $d\to 2$ のとき、ユニタリーフェルミ気体は
自由フェルミ気体に帰着 ∴ $\xi\Big|_{d\to 2} \to 1$!



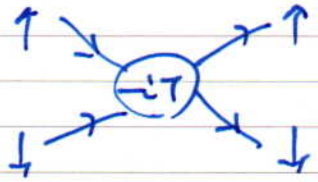
MC 計算
実験
} $\xi\Big|_{d=3} \simeq 0.37$

平均場 $\xi_{MF} = 0.59$

自明な極限のまわりで
ξ を系統的に展開できる! ⇒ イプシロン展開

2) 場の理論による理解

一般の次元 d における
2体散乱



$$-iT(k) = \frac{i}{\frac{1}{g} + \int\frac{d\vec{p}}{(2\pi)^d}\frac{1}{k_0 - \frac{k^2}{4m} + i0^+ - \frac{p^2}{m}}}$$

$$= \frac{i}{\underbrace{\frac{1}{g} - \int\frac{d\vec{p}}{(2\pi)^d}\frac{m}{p^2}}_{-\frac{m}{4\pi a} \to 0} + \underbrace{\int\frac{d\vec{p}}{(2\pi)^d}\frac{k_0 - \frac{k^2}{4m} + i0^+}{\frac{p^2}{m}\left(k_0 - \frac{k^2}{4m} + i0^+ - \frac{p^2}{m}\right)}}_{2<d<4\text{ で収束}}}$$

$$\frac{S_d}{(2\pi)^d}\int_0^\infty dp\cdot p^{d-1}$$

$$S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} = \begin{cases} 2 & d=1 \\ 2\pi & d=2 \\ 4\pi & d=3 \\ 2\pi^2 & d=4 \\ \vdots & \end{cases}$$

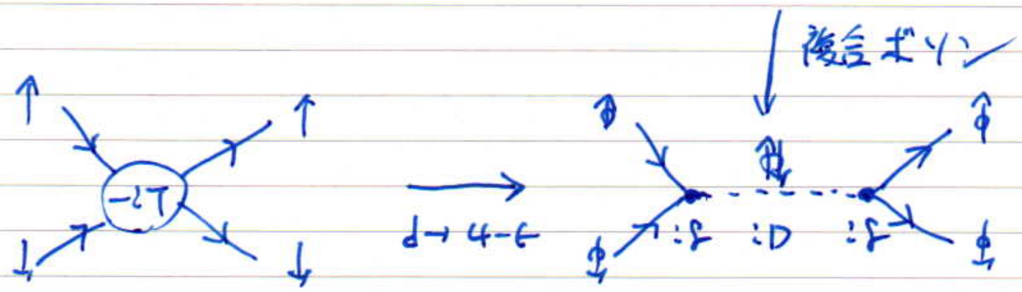
$$-iT(k)\Big|_{d=4-\epsilon} = \frac{i}{\frac{S_d}{(2\pi)^d}\int_0^\infty dp\cdot p^{d-1}\,\frac{k_0-\frac{k^2}{4m}+i0^+}{\frac{p^2}{m}\left(\cancel{k_0-\frac{k^2}{4m}+i0^+}-\frac{p^2}{m}\right)}}$$

$p\sim\infty$

$$\xrightarrow{\epsilon\ll 1} \frac{i}{-\frac{m^2}{8\pi^2}\,\frac{k_0-\frac{k^2}{4m}+i0^+}{\epsilon}}$$

$$= \underbrace{-\frac{8\pi^2\epsilon}{m^2}}_{(ig)^2}\ \underbrace{\frac{i}{k_0-\frac{k^2}{4m}+i0^+}}_{iD(k)}$$

結合定数　　プロパゲータ



$g^2\sim\epsilon\ll 1$ による

系統的な展開が可能！

⇑

弱結合フェルミ・ボース混合気体

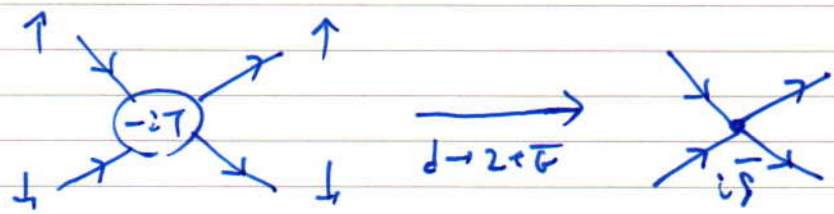
$$-iT(k)\Big|_{d=2+\epsilon} = \frac{i}{\dfrac{S_d}{(2\pi)^d}\displaystyle\int_0^\infty dp\cdot p^{d-1}\,\dfrac{k_0^2-\frac{k^2}{2m}+i0^+}{\frac{p^2}{m}\left(k_0-\frac{k^2}{4m}+i0^+-\cancel{\frac{p^2}{m}}\right)}}$$

$p\sim 0$

$$\xrightarrow[\epsilon\ll 1]{} \frac{i}{\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{m}{\epsilon}}$$

$$= i\,\frac{2\pi\epsilon}{m} \equiv i\bar{g}$$

結合定数



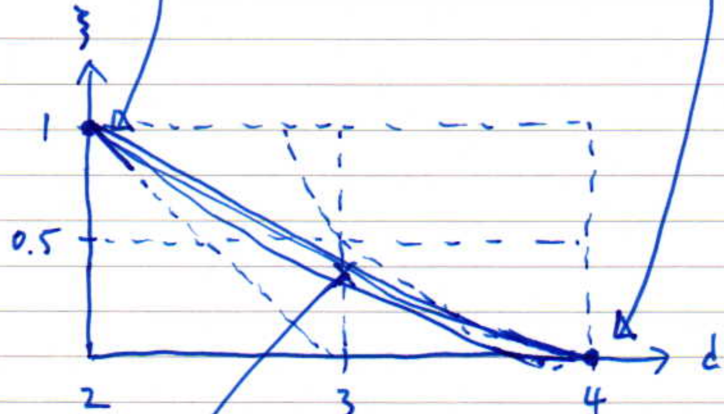
$\bar{g}\sim\epsilon\ll 1$ による

系統的な展開が可能！

⇑

弱結合フェルミ気体

$\xi = 1 - \bar{\epsilon} + O(\bar{\epsilon}^2)$ $\qquad$ $\xi = 0 + \frac{1}{2}\epsilon^{3/2} + O(\epsilon^{5/2})$



LO + NLO
with Borel-Padé

$$\xi\big|_{d=3} \simeq 0.36 \sim 0.39 \quad !!!$$

$$\Longleftrightarrow \quad \xi \simeq 0.37 \ \text{from} \begin{cases} \text{MC計算} \\ \text{実験} \end{cases}$$

c.f.) $$\xi = 0 + \frac{1}{2}\epsilon^{3/2} + \left(\frac{1}{16}\ln\epsilon - 0.0246\right)\epsilon^{5/2} + O(\epsilon^{7/2})$$

$$\xi = 1 - \bar{\epsilon} + 0.807\,\bar{\epsilon}^2 + O(\bar{\epsilon}^3)$$