"operator - state correspondence"

$$H_{\text{free}} = \int d\vec{x}\ \psi_\sigma^\dagger \left(-\frac{\nabla^2}{2m}\right) \psi_\sigma$$

✓ 自由場の理論の演算子

例1) $\mathcal{O} = \psi_\uparrow$

次元 $\Delta_{\mathcal{O}} = \frac{d}{2}$

粒子数 $N_{\mathcal{O}} = 1$

c.f. $[p] = 1$, $[E] = [\frac{p^2}{2m}] = 2$

$[\nabla] = [p] = 1$

$[x] = [\hbar/p] = -1$

$[t] = [\hbar/E] = -2$

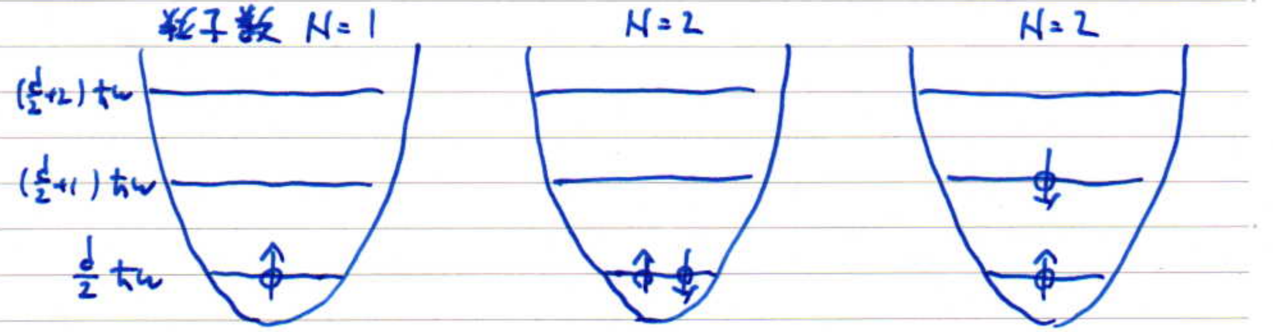
2) $\mathcal{O} = \psi_\uparrow \psi_\downarrow$

$\Delta_{\mathcal{O}} = \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = d$, $N_{\mathcal{O}} = 2$

3) $\mathcal{O} = \psi_\uparrow \nabla_i \psi_\downarrow$ $(i = 1, 2, \cdots, d)$

$\Delta_{\mathcal{O}} = d + 1$, $N_{\mathcal{O}} = 2$

✓ 調和振動子中のエネルギー固有状態



$E = \frac{d}{2}\hbar\omega$

$E = \frac{d}{2}\hbar\omega + \frac{d}{2}\hbar\omega = d\,\hbar\omega$

$E = \frac{d}{2}\hbar\omega + (\frac{d}{2}+1)\hbar\omega = (d+1)\hbar\omega$

KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-836B 6mm ruled×36 lines

⇒ "operator-state correspondence"

$$\left\{\begin{array}{l} \text{場の理論の演算子の次元 } \Delta_{\mathcal{O}} \\ \qquad \Updownarrow \qquad E = \Delta_{\mathcal{O}}\,\hbar\omega \\ \text{調和振動子中のエネルギー固有値 } E \end{array}\right.$$

← スケール対称性の帰結！

系の持つ（連続的）対称性

✓ 内部対称性 ($\psi \to e^{i\theta}\psi$)

$\Longleftrightarrow$ 粒子数 $N = \int d\vec{x}\, n$

- mass density $n = m\psi_a^\dagger \psi_a$
- current $\vec{j} = -\frac{i}{2}\psi_a^\dagger \overleftrightarrow{\nabla} \psi_a$

✓ 並進対称性

$$\left\{\begin{array}{l} \text{時間 } (t \to t + t_0) \Longleftrightarrow \text{ハミルトニアン } H \\ \text{空間 } (\vec{x} \to \vec{x} + \vec{x}_0) \Longleftrightarrow \text{運動量 } \vec{P} = \int d\vec{x}\, \vec{j} \end{array}\right.$$

✓ 回転対称性 ($x_i \to R_{ij} x_j$)

$\Longleftrightarrow \vec{L} = \int d\vec{x}\, \vec{x} \times \vec{j}$

✓ ガリレイ対称性 ($\vec{x} \to \vec{x} + \vec{v}t$)

$$\Longleftrightarrow \vec{K}_t = \underbrace{\int d\vec{x}\, \vec{x}\, n}_{\equiv \vec{K}} - t\vec{P} \qquad (1)$$

KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-836B 6mm ruled×36 lines

$\Downarrow$ もし、相互作用がスケール不変であれば

- スケール対称性 ($\vec{x} \to e^{\lambda}\vec{x}$, $t \to e^{2\lambda} t$)

$$\Longleftrightarrow \quad D_t = \underbrace{\int d\vec{x}\ \vec{x}\cdot\vec{J}}_{\equiv D} - 2tH \qquad (2)$$

- 共形対称性 ($\vec{x} \to \frac{\vec{x}}{1+ct}$, $t \to \frac{t}{1+ct}$)
(conformal)

$$\Longleftrightarrow \quad C_t = \underbrace{\int d\vec{x}\ \frac{x^2}{2} n}_{\equiv C} - t D + t^2 H \qquad (3)$$

(1) $\dot{\vec{K}}_t = -i[\vec{K}_t, H] + \frac{\partial \vec{K}_t}{\partial t}$

$$= -i\underbrace{[\vec{K}, H]} - \vec{P} = 0$$

$$[\vec{K}, H] = \int d\vec{x}\ \vec{x}\ \underbrace{[n, H]}_{i\dot{n} = -i\nabla\cdot\vec{J}} \quad \text{(連続の方程式)}$$

$$= -i \int d\vec{x}\ \vec{x}\ (\nabla\cdot\vec{J})$$

$$= i\int d\vec{x}\ \vec{J} = i\vec{P}$$

(2) $\dot{D}_t = -i[D_t, H] + \frac{\partial D_t}{\partial t}$

$= -i[D, H] - 2H$

↓ 具体例

$$H = \int d\vec{x}\, \psi^\dagger_\sigma(\vec{x}) \left(-\frac{\nabla^2}{2m}\right) \psi_\sigma(\vec{x})$$

$$+ \int d\vec{x}\, d\vec{y}\, \psi^\dagger_\uparrow(\vec{x})\, \psi^\dagger_\downarrow(\vec{y})\, V(\vec{x}-\vec{y})\, \psi_\downarrow(\vec{y})\, \psi_\uparrow(\vec{x})$$

有限へスケール変換

$$e^{-i\lambda D}\, \psi(\vec{x})\, e^{i\lambda D} \equiv \psi_\lambda(\vec{x})$$

$$\frac{d}{d\lambda}\psi_\lambda(\vec{x}) = e^{-i\lambda D}\, i\underbrace{[\psi(\vec{x}), D]}_{-i\vec{x}\cdot\nabla\psi - i\frac{d}{2}\psi}\, e^{i\lambda D}$$

$$= \left(\vec{x}\cdot\nabla + \frac{d}{2}\right)\psi_\lambda(\vec{x})$$

$$\Rightarrow \psi_\lambda(\vec{x}) = e^{\lambda\frac{d}{2}}\, \psi(e^\lambda \vec{x})$$

KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-836B 6mm ruled×36 lines

従って、ハミルトニアンは

$$e^{-i\lambda D} H e^{i\lambda D}$$

$$= e^{\lambda d} \int d\vec{x}\, \psi_\sigma^\dagger(e^\lambda \vec{x}) \left(-\frac{\nabla^2}{2m}\right) \psi_\sigma(\underbrace{e^\lambda \vec{x}}_{\vec{x}'})$$

$$+ e^{2\lambda d} \int d\vec{x}\, d\vec{y}\, \psi_\uparrow^\dagger(e^\lambda \vec{x}) \psi_\downarrow^\dagger(e^\lambda \vec{y}) V(\vec{x}-\vec{y}) \psi_\downarrow(e^\lambda \vec{y}) \times \psi_\uparrow(e^\lambda \vec{x})$$

$$= e^{2\lambda} \int d\vec{x}'\, \psi_\sigma^\dagger(\vec{x}') \left(-\frac{\nabla'^2}{2m}\right) \psi_\sigma(\vec{x}')$$

$$+ e^{2\lambda} \int d\vec{x}'\, d\vec{y}'\, \psi_\uparrow^\dagger(\vec{x}') \psi_\downarrow^\dagger(\vec{y}') \underbrace{e^{-2\lambda} V(e^{-\lambda}\vec{x}' - e^{-\lambda}\vec{y}')}_{V'(\vec{x}'-\vec{y}')} \times \psi_\downarrow(\vec{y}') \psi_\uparrow(\vec{x}')$$

$$\equiv e^{2\lambda} H'$$

と変換する。

つまり、ポテンシャルが

$$V(\vec{r}) \longrightarrow V'(\vec{r}) = e^{-2\lambda} V(e^{-\lambda}\vec{r})$$

と変化する。

一般には $V'(\vec{r}) \neq V(\vec{r})$

$\Longleftrightarrow$ スケール不変でない。

KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-836B 6mm ruled×36 lines

スケール不変な相互作用

$$\Longleftrightarrow \underbrace{V'(\vec{r})}_{e^{-2\lambda} V(e^{-\lambda}\vec{r})} = V(\vec{r})$$

例) ・ $V(\vec{r}) = 0$

・ $V(\vec{r}) = \dfrac{\#}{r^2} \longrightarrow e^{-2\lambda} \dfrac{\#}{(e^{-\lambda} r)^2} = \dfrac{\#}{r^2}$

ただし、 $\# > -\left(\frac{d-2}{2}\right)^2$

$\# < -\left(\frac{d-2}{2}\right)^2$ のとき

<u>量子異常</u>による破れ

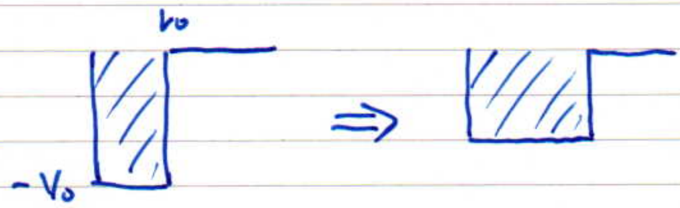
・ ゼロレンジ極限 + ユニタリー極限

$$V(\vec{r}) = -V_0\, \theta(r_0 - r)$$

$$\longrightarrow V'(\vec{r}) = -e^{-2\lambda} V_0\, \underbrace{\theta(r_0 - e^{-\lambda} r)}_{\theta(e^{\lambda} r_0 - r)}$$

つまり、ポテンシャルのレンジ $r_0 \to e^{\lambda} r_0$

深さ $V_0 \to e^{-2a} V_0$



KOKUYO LOOSE-LEAF ノ-836B 6mm ruled×36 lines

散乱長 $a = r_0 - \dfrac{1}{\kappa_0 \cot \kappa_0 r_0}$ $\left(V_0 = \dfrac{\kappa_0^2}{2\mu}\right)$ なので、

$$a \to e^{\lambda} a$$

ユニタリー極限 $a \to \infty$

ゼロレンジ極限 $r_0 \to 0$

$$\kappa_0 = \frac{\pi}{2}\frac{1}{r_0} \to \infty$$

$a = \infty \to \infty$

$r_0 = 0 \to 0$

$\kappa_0 = \infty \to \infty$

なので、スケール不変!

$\Rightarrow$ スケール不変な相互作用

$$V'(r) = V(r) \Rightarrow H' = H$$

$$e^{-i\lambda D} H e^{i\lambda D} = e^{2\lambda} H$$

$$\Rightarrow -i\lambda [D, H] = 2\lambda H$$

$$\Rightarrow [D, H] = 2i H$$

また、$\dot{D}_t = -i[D, H] - 2H$

$$= 0$$

(3) $\dot{C}_t = -i[C_t, H] + \frac{\partial C}{\partial t}$

$$= -i[C, H] - i\underbrace{[-tD, H]}_{(-t)2iH} - D + 2tH$$

$$= -i\underbrace{[C, H]}\, - D = 0$$

$$[C, H] = \int d\vec{x}\, \frac{x^2}{2} \underbrace{[n, H]}_{i\dot{n} = -i\nabla\cdot\vec{J}} \quad \text{(連続の方程式)}$$

$$= -i \int d\vec{x}\, \frac{x^2}{2} \nabla\cdot\vec{J}$$

$$= i \int d\vec{x}\, \vec{x}\cdot\vec{J} = iD$$

交換関係 まとめ
$$\left.\begin{aligned} [D, H] &= 2iH \\ [C, H] &= iD \\ [D, C] &= -2iC \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} SO(2,1) \\ \text{Lorentz} \\ \text{group} \end{array}$$

$$\left(\begin{aligned} [D, C] &= \int d\vec{x} \int d\vec{y}\, \vec{x}\cdot \frac{y^2}{2} [\underbrace{\vec{J}(\vec{x})}_{-\frac{i}{2}\psi^\dagger\overleftrightarrow{\nabla}\psi}, \underbrace{n(\vec{y})}_{\psi^\dagger\psi}] \\ &= -2i \int dy\, \frac{y^2}{2} \psi^\dagger\psi = -2iC \end{aligned} \right)$$