"operator - state correspondence"

$$\begin{cases} \text{場の理論の演算子の次元 } \Delta_O \\ \quad \Updownarrow \quad E = \Delta_O \hbar\omega \\ \text{調和振動子中のエネルギー固有値 } E \end{cases}$$

演算子 $O(t, \vec{x}) = e^{iHt - i\vec{P}\cdot\vec{x}} \underbrace{O(0, \vec{0})}_{} e^{-iHt + i\vec{P}\cdot\vec{x}}$

$t=0$, $\vec{x}=0$ を考える.

$O \equiv O(0, \vec{0})$

演算子の(スケール)次元 Δ_O

例) $O = \phi \Rightarrow [D, \phi] = i \underbrace{\frac{d}{2}}_{\Delta_O} \phi$

$O = H \Rightarrow [D, H] = i \underbrace{2}_{\Delta_O} H$

$\therefore \quad [D, O] = i \underbrace{\Delta_O}_{} O$

$[D, C] = -2iC$ より、Cの次元 $\Delta = -2$

$\Rightarrow$ $[C, \mathcal{O}] \equiv \mathcal{O}_{new}$ とすると、

$$[D, \mathcal{O}_{new}] = [D, [C, \mathcal{O}]]$$

$$= [C, \underbrace{[D, \mathcal{O}]}_{i\Delta_{\mathcal{O}}\mathcal{O}}] + [\underbrace{[D, C]}_{-2iC}, \mathcal{O}]$$

$$= i\underbrace{(\Delta_{\mathcal{O}} - 2)}_{\Delta_{\mathcal{O}_{new}}} \underbrace{[C, \mathcal{O}]}_{\mathcal{O}_{new}}$$

つまり、$\mathcal{O}_{new} = [C, [C, [C, \cdots, [C, \mathcal{O}]]]]$ と作れば、

$\Delta_{\mathcal{O}_{new}} = \Delta_{\mathcal{O}} - 2 - 2 - 2 \cdots$ といくらでも下げられる。

ただし、$\Delta_{\mathcal{O}} \geq \frac{d}{2}$ (unitarity bound) が示せるので、

$[C, \mathcal{O}] = 0$ となる $\mathcal{O}$ が存在する。

$\Rightarrow$ $\mathcal{O} \equiv \mathcal{O}_{pri}$ プライマリ演算子

例) $\mathcal{O} = \phi(\vec{x})$: $[C, \phi(\vec{x})] = \frac{x^2}{2}\phi(\vec{x})$

$\rightarrow 0$ $(\vec{x} \to \vec{0})$ ○

$\mathcal{O} = \nabla^2\phi(\vec{x})$: $[C, \nabla^2\phi(\vec{x})] = \nabla^2\left[\frac{x^2}{2}\phi(\vec{x})\right]$

$\rightarrow d\,\phi(\vec{0})$ ×

(証明)

調和振動子ハミルトニアン

$$H_{osc} = \int d\vec{x}\, \psi_\sigma^\dagger \left(-\frac{\nabla^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \right) \psi_\sigma$$

$$+ \int d\vec{x}\, d\vec{y}\, \psi_\tau^\dagger(\vec{x})\, \psi_\sigma^\dagger(\vec{y})\, V(\vec{x}-\vec{y})\, \psi_\sigma(\vec{y})\, \psi_\tau(\vec{x})$$

$$= H + \omega^2 C$$

真空

状態 $|\Psi_\alpha\rangle = e^{-H/\omega} \mathcal{O}_{pri}(0) |vac\rangle$ を作ると

$$H_{osc}|\Psi_\alpha\rangle = e^{-H/\omega} \underbrace{e^{H/\omega} H_{osc}\, e^{-H/\omega}} \mathcal{O}_{pri} |vac\rangle$$

$$H_{osc} + \frac{1}{\omega} \underbrace{[H, H_{osc}]}_{\substack{\omega^2 [H, C] \\ = -i\omega^2 D}} + \frac{1}{2\omega^2} \underbrace{[H, \underbrace{[H, H_{osc}]}_{-i\omega^2 D}]}_{-2\omega^2 H} + \underbrace{\cdots}_{\Downarrow\, 0}$$

$$= e^{-H/\omega} \left(\cancel{H} + \omega^2 C - i\omega D - \cancel{H} \right) \mathcal{O}_{pri} |vac\rangle$$

$$= e^{-H/\omega} \left(\omega^2 \underbrace{[C, \mathcal{O}_{pri}]}_{0} - i\omega \underbrace{[D, \mathcal{O}_{pri}]}_{i\Delta_\mathcal{O} \mathcal{O}_{pri}} \right) |vac\rangle$$

$$= \Delta_\mathcal{O}\, \omega\, \underbrace{e^{-H/\omega} \mathcal{O}_{pri} |vac\rangle}_{|\Psi_\alpha\rangle}$$

⇒ 次元 $\Delta_{\mathcal{O}}$ のプライマリ演算子 $\mathcal{O}_{pri}$ に対応して

エネルギー $E = \Delta_{\mathcal{O}} \hbar\omega$ の固有状態が存在！

"operator - state correspondence"

$$\Delta_{\mathcal{O}} \rightleftarrows E = \Delta_{\mathcal{O}} \hbar\omega$$

実験で測れる

OPE などに必要

演算子積展開

$$\underbrace{\mathcal{O}_A(\vec{x})\,\mathcal{O}_B(\vec{0})}_{\Delta_A + \Delta_B} = \sum_C W_C(\vec{x})\,\underbrace{\mathcal{O}_C(\vec{0})}_{\Delta_C}$$

次元 $\Delta_A + \Delta_B - \Delta_C$

$$\therefore\ W_C(\vec{x}) \sim |\vec{x}|^{\Delta_C - \Delta_A - \Delta_B}$$

⇒ 近距離 $\vec{x} \sim \vec{0}$ では

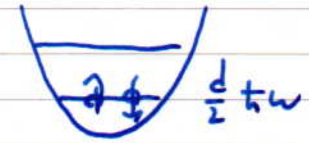
小さい Δ_C を持つ演算子が重要！

応用例) 調和振動子中の2粒子 ↑↓ のユニタリ極限の基底状態のエネルギー

2粒子演算子

$O(t,\vec{x}) = \psi_\downarrow \psi_\uparrow (t,\vec{x})$

自由場 (相互作用なし) $\Delta_O = \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = d$



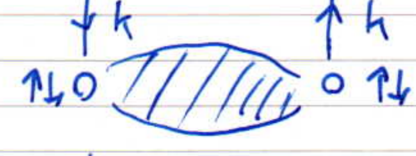
相互作用があると $\Delta_O \neq d$

← 異常次元

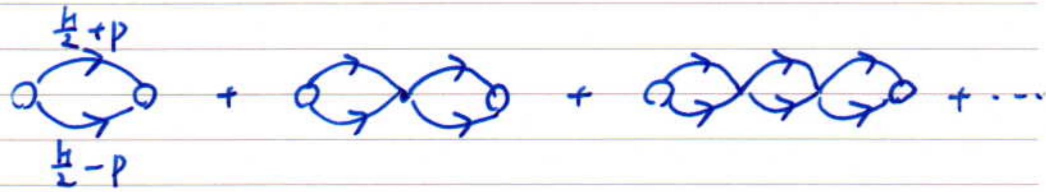
相関関数は

$$\int dt\, d\vec{x}\; e^{ik_0 t - i\vec{k}\cdot\vec{x}} \langle T\, O(t,\vec{x})\, O^\dagger(0,\vec{0}) \rangle$$

=



=



$$= \frac{(-iT) - if}{(if)^2}$$

ただし. $\frac{1}{f} - \int^{\Lambda} \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{m}{p^2} = 0$ より

$$f = \frac{2\pi^2}{m\Lambda} \to 0$$

$$\to \frac{1}{f^2}\, iT(k)$$

$$= \frac{1}{f^2} \frac{4\pi}{m} \frac{i}{ik + \underbrace{\frac{1}{a}}_{\to 0}}$$

$\sim \Lambda^2 \to \infty$ $\underbrace{(\Lambda \to \infty)}_{\text{ゼロ・レンジ}}$ と発散!

繰り込まれた演算子

$\tilde{\phi}(t, \vec{x}) = \underbrace{f}_{\sim \Lambda} \psi_\downarrow \psi_\uparrow (t, \vec{x})$ を定義すると

相関関数は

$$\underbrace{\int dt\, d\vec{x}}_{-5} \underbrace{\langle T \tilde{\phi}^\dagger \tilde{\phi} \rangle}_{2\Delta_\phi} = \underbrace{\frac{4\pi}{mk}}_{-1}$$ と有限

$$\Rightarrow \Delta_\phi = 2 = \Delta_{free} \underbrace{-1}_{\text{異常次元}}$$

従, 2. $E_{unitary} = 2\hbar\omega \leftrightarrow E_{free} = 3\hbar\omega$

確認）

$$H_{osc}\psi(\vec{x},\vec{y}) = E\psi(\vec{x},\vec{y})$$

$$\text{with } \psi(\vec{x},\vec{y})\Big|_{|\vec{x}-\vec{y}|\to 0} \propto \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

$$H_{osc} = -\frac{\nabla_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - \frac{\nabla_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2$$

解）$\psi(\vec{x},\vec{y}) = \dfrac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}\, e^{-\frac{x^2+y^2}{2m\omega}}$

はエネルギー固有状態であり、

$\underline{E = 2\hbar\omega}$ を得られる。