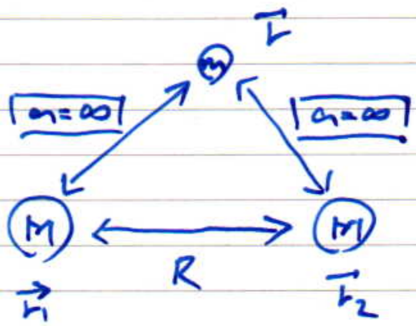
☆ ボルン・オッペンハイマー近似



(1) 軽い粒子 m について解く

Schrödinger 方程式

$$-\frac{\nabla^2}{2m}\psi(\vec{r}) = E\psi(\vec{r}) \qquad \text{for } \vec{r} \neq \vec{r}_1, \vec{r}_2$$

with B.P. boundary condition

$$\psi\big|_{\vec{r}\to\vec{r}_{1,2}} = \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_{1,2}|} - \underbrace{\frac{1}{a}}_{\to 0} + O(|\vec{r}-\vec{r}_{1,2}|)$$

$E = -\frac{\kappa^2}{2m} < 0$ とする.

$$\Rightarrow \left(\partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r\right)\psi = \kappa^2\psi$$

$$\Rightarrow \partial_r^2(r\psi) = \kappa^2(r\psi) \Rightarrow \psi = \frac{e^{-\kappa r}}{r}$$

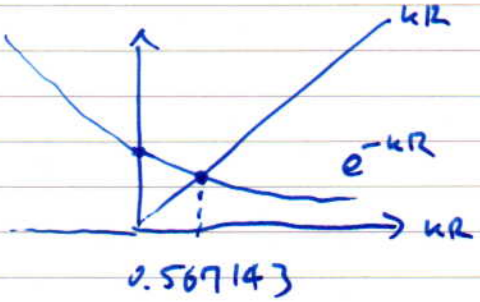
$$\therefore \psi(\vec{r}) = \frac{e^{-\kappa|\vec{r}-\vec{r}_1|}}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} + \frac{e^{-\kappa|\vec{r}-\vec{r}_2|}}{|\vec{r}-\vec{r}_2|}$$

B.P. boundary condition

$$\Rightarrow \psi\big|_{\vec{r}\to\vec{r}_1} = \frac{1-\kappa|\vec{r}-\vec{r}_1|}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} + \frac{e^{-\kappa|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|} + O(|\vec{r}-\vec{r}_1|)$$

$$= \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|} \underbrace{- \kappa + \frac{e^{-\kappa R}}{R}}_{= -\frac{1}{a} = 0} + O(|\vec{r}-\vec{r}_1|)$$

$$\therefore \ \kappa R = e^{-\kappa R}$$



$$\kappa = \frac{0.567143}{R}$$

つまり、軽い粒子の束縛エネルギーは

$$E = -\frac{\kappa^2}{2m} = -\frac{(0.567143)^2}{2mR^2}$$

スケール不変性から定まる

$$\Uparrow$$

重い粒子間のポテンシャルと見なせる

$$V(R) = E(R)$$

(2) 重い粒子 M について解く

Schrödinger 方程式

$$\Big[-\frac{\nabla^2}{M}+\underbrace{V(R)}\Big]\Psi(R)=E\Psi(R)$$

スケール不変なので

束縛状態不可能???

$$\Longrightarrow\ \Big[-\frac{1}{M}\Big(\partial_R^2+\frac{2}{R}\partial_R\Big)-\frac{(0.56)^2}{2mR}\Big]\Psi(R)=-\frac{k^2}{M}\Psi(R)$$

s波

$$\Longrightarrow\ \Big[\partial_R^2+\frac{1}{R}\partial_R+\frac{1}{R^2}\underbrace{\Big(\frac{M}{2m}(0.56)^2-\frac{1}{4}\Big)}_{=\alpha^2}\Big]\sqrt{R}\,\Psi(R)=k^2\sqrt{R}\,\Psi(R)$$

ベッセル方程式 $\Rightarrow$ $\sqrt{R}\,\Psi(R)=K_{i\alpha}(kR)$

全ての k に対して解が存在する???

$$\Psi(R)=\frac{1}{\sqrt{R}}K_{i\alpha}(kR)$$

$$\xrightarrow[kR\ll1]{}\ \frac{1}{\sqrt{R}}\sin[\alpha\ln(kR)+\varphi]$$

$\dfrac{\Psi'(R)}{\Psi(R)}$ は $R \sim r_0$ での境界条件で固定

$\Longrightarrow$ もし $k = k_*$ が解なら、$k = e^{-\pi/\alpha} k_*$ も解

$\left(\begin{array}{l} k r_0 \ll 1 \\ \text{のとき} \end{array} \right)$

$(e^{-\pi/\alpha})^2 k_*$ も解

$(e^{-\pi/\alpha})^3 k_*$ も解

$\vdots$

$(e^{-\pi/\alpha})^n k_*$ も解

∴ 離散無限個の束縛状態

$$E_n = e^{-2\pi n/\alpha} \frac{k_*^2}{m} \quad \text{が存在}$$

$\Longrightarrow$ エフィモフ効果！

$V(R) \sim \frac{1}{R^2}$ ポテンシャルのスケール不変性が

境界条件 k_* によって破られた $\Longleftrightarrow$ 量子異常！

連続的なスケール不変性

$\Downarrow$ 量子異常による破れ

離散的なスケール不変性