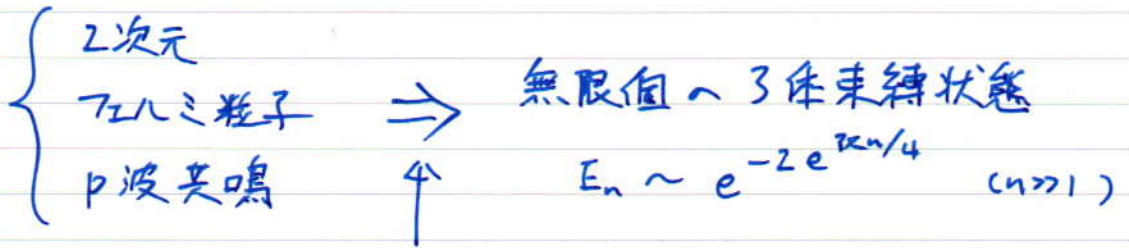


"スーパ-エフィモフ効果"

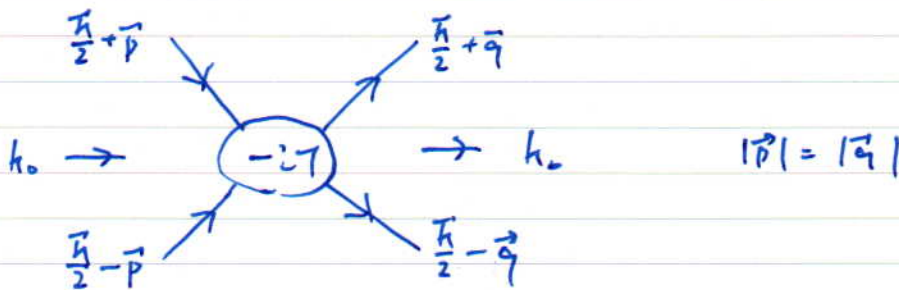


繰り込み群の方法

短距離ポテンシャル $V(r) \sim$

相互作用する 2つのフェルミ粒子

最低の部分波 = p波 ($l=1$)



p波 T行列

$$\begin{aligned}
 -iT(k) &= \frac{16i}{m} f_p(k) \\
 &= \frac{16i}{m} \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{-imE + mE \cot \delta}
 \end{aligned}$$

重心系でのエネルギー - $E = k_0^2 - \frac{E^2}{4m} + i0^+$

全エネルギー -

重心の運動エネルギー -

effective range 展開

$$-2T(h) = \frac{16i}{m} \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{-\frac{1}{a} - \frac{mE}{\pi} \ln\left(-\frac{\Delta^2}{mE}\right) + (mE)^2 + (mE)^4 + \dots}$$

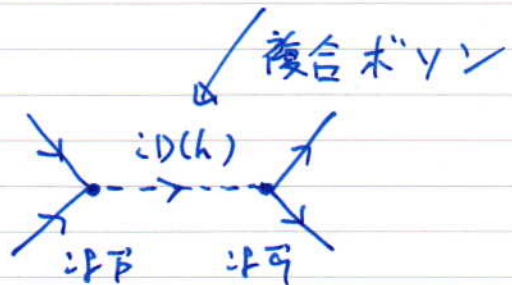
↑ ↑
"散乱長" "effective range"

$$\begin{array}{l} a \rightarrow \infty \\ \rightarrow \\ E \rightarrow 0 \end{array} \quad \underbrace{-\frac{16\pi}{m^2 \ln\left(-\frac{\Delta^2}{mE}\right)} \vec{p} \cdot \vec{q}}_{\frac{\delta}{m^2} (i\delta)^2} \quad \underbrace{\frac{i}{k_0 - \frac{k^2}{4m} + i0^+}}_{iD(h)}$$

700104-9



$$\begin{array}{l} a \rightarrow \infty \\ \rightarrow \\ E \rightarrow 0 \end{array}$$



結合定数 $\delta^2 \sim \frac{2\pi}{\ln\left(-\frac{\Delta^2}{mE}\right)}$ は

低エネルギー ($E \rightarrow 0$) で対数的に減少!

低エネルギー第一近似理論

$$a = \infty \Leftrightarrow \epsilon_0 = \frac{p^2}{2a} \frac{\Delta^2}{m}$$

$$L_{\Lambda} = \psi^\dagger \left(i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m} \right) \psi + \phi_a^\dagger \left(i\partial_t + \frac{\nabla^2}{4m} - \epsilon_0 \right) \phi_a$$

$$+ \frac{g}{m} \phi_a^\dagger \psi (-i\nabla_a) \psi + \frac{g}{m} \psi^\dagger (-i\nabla_a) \psi \phi_a$$

sum over $a = \pm$, $\nabla_{\pm} \equiv \nabla_x \pm i\nabla_y$

フインマン・ルール

- フェルミ粒子 ψ のプロパゲータ

$$\begin{array}{c} p \\ \longrightarrow \end{array} \quad iG(p) = \frac{i}{p_0 - \frac{p^2}{2m} + i0^+}$$

- ボース粒子 ϕ_a (角運動量 $a = \pm 1$) のプロパゲータ

$$\begin{array}{c} p \\ \text{---} \longrightarrow \text{---} \\ a \end{array} \quad iD(p) = \frac{i}{p_0 - \frac{p^2}{4m} + i0^+}$$

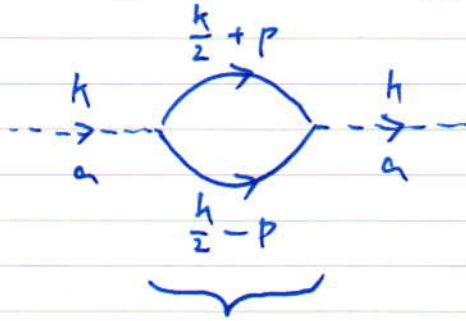
- フェルミ・ボース結合

$$\begin{array}{c} \frac{k}{2} + p \\ \swarrow \\ \bullet \\ \nwarrow \\ \frac{k}{2} - p \end{array} \begin{array}{c} k \\ \longrightarrow \text{---} \\ a \end{array} \quad 2i \frac{g}{m} P_a$$

$$\begin{array}{c} k \\ \longrightarrow \text{---} \\ a \end{array} \begin{array}{c} \frac{k}{2} + p \\ \swarrow \\ \bullet \\ \nwarrow \\ \frac{k}{2} - p \end{array} \quad 2i \frac{g}{m} P_a$$

"Wilson 流線1)込み群"

$e^{-S} \Delta < |\Lambda| < \Lambda$ を積分して Δ の変化を見た。



ボース粒子の自己エネルギー $\Sigma(k)$

$$\Sigma(k) = i \left(i \frac{g}{m} \right)^2 \int_{\mathcal{P}} 2 \bar{p}^2 : G(\frac{k}{2} + p) : G(\frac{k}{2} - p)$$

$$= 2i \frac{g^2}{m^2} \int_{\mathcal{P}} \bar{p}^2 \frac{1}{\frac{k_0}{2} + p_0 - \frac{(\frac{k}{2} + p)^2}{2m} + i0^+} \frac{1}{\frac{k_0}{2} - p_0 - \frac{(\frac{k}{2} - p)^2}{2m} + i0^+}$$

$$= 2 \frac{g^2}{m^2} \int_{\mathcal{P}} \frac{\bar{p}^2}{k_0 - \frac{k^2}{4m} - \frac{\bar{p}^2}{m} + i0^+}$$

$$= \frac{g^2 \Lambda^2}{2\pi m} \quad \text{if } \epsilon_0 = \frac{g^2 \Lambda^2}{2\pi m} \text{ と打ち消し合うので}$$

$$= 2 \frac{g^2}{m^2} \int_{\mathcal{P}} \left(\frac{\bar{p}^2}{k_0 - \frac{k^2}{4m} - \frac{\bar{p}^2}{m} + i0^+} + \epsilon_0 \right)$$

" $\epsilon_0 = \infty$ "

$$\int_{\mathcal{P}} \frac{dP \cdot P}{2\pi}$$

$$m \cdot \frac{k_0 - \frac{k^2}{4m}}{k_0 - \frac{k^2}{4m} - \frac{\bar{p}^2}{m} + i0^+}$$

$$= -\frac{g^2}{\pi} \left(k_0 - \frac{\hbar^2}{4m} \right) \ln \frac{\Lambda}{e^{\beta} \Lambda}$$

従, 2. ホース粒子の propagator は

$$-i \langle \phi_a \phi_a^\dagger \rangle(k) = \frac{1}{k_0 - \frac{\hbar^2}{4m} + i0^+}$$

$$\rightarrow \frac{1}{k_0 - \frac{\hbar^2}{4m} - \Sigma(k) + i0^+} = \frac{1}{1 + \frac{g^2}{\pi} S} \cdot \frac{1}{k_0 - \frac{\hbar^2}{4m} + i0^+}$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{g^2}{\pi} S \right)}{k_0 - \frac{\hbar^2}{4m} + i0^+} \quad \rightarrow \text{波動関数の線に因子 } Z$$

と変化した。

$$\Rightarrow \psi \rightarrow Z \psi = \psi^\dagger \left(i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m} \right) \psi + \frac{1}{Z} \phi_a^\dagger \left(i\partial_t + \frac{\nabla^2}{4m} \right) \phi_a + g \phi_a^\dagger \psi (-i\nabla_a) \psi + g \psi^\dagger (-i\nabla_a) \psi \phi_a$$

$\phi_a \rightarrow \sqrt{Z} \phi_a$ と再定義すると、

$$\text{結合定数は } g \rightarrow \sqrt{Z} g = \left(1 - \frac{g^2}{2\pi} S \right) g$$

と変化した。

結合定数の変化を“微分方程式”で表すと

$$\frac{dS}{dS} = -\frac{S^3}{2\pi} \quad \leftarrow \text{解いた4群方程式}$$

解は $S^2(S) = \frac{1}{\frac{1}{S_0^2} + \frac{S}{\pi}} \rightarrow \frac{\pi}{S} \quad (S = \ln \frac{4}{e^{S/\Lambda} - 1} \rightarrow \infty)$

\therefore 結合定数 S^2 は低エネルギー ($S \rightarrow \infty$) で
対数的に減少する。

3体問題 \Rightarrow 左に3粒子と複合ボース粒子の散乱
 $\circ \psi \quad \quad \quad \odot \phi_a$

$$\mathcal{L}_{3\text{-body}} = \frac{g_3}{m} \psi^\dagger \phi_a^\dagger \phi_a \psi + \dots$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{無次元}} \quad \quad \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{irrelevant} \rightarrow 0}$
 $\Leftrightarrow \text{マージナル} \quad \quad \quad (\text{低エネルギー極限})$



c.f. $S = \int d^4x d^3x \mathcal{L}$
 $\quad \quad \quad \underbrace{\hspace{2em}}_{-4}$

$$[\psi] = [\phi_a] = 1$$

u_3 の繰り込み

$$\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \sim g^4 \ln \frac{\Lambda}{e^3 \Lambda}$$

$$\text{Diagram 3} \sim g^2 u_3 \ln \frac{\Lambda}{e^3 \Lambda}$$

$$\text{Diagram 4} \sim g^2 u_3 \ln \frac{\Lambda}{e^3 \Lambda}$$

$$\text{Diagram 5} \sim u_3^2 \ln \frac{\Lambda}{e^3 \Lambda}$$



$e^{-3\Lambda} < |\hbar| < \Lambda$ の繰り込み

$$u_3 \rightarrow u_3 + \frac{16 g^4}{3\pi} S - \frac{8 g^2 u_3}{3\pi} S + \frac{2 u_3^2}{3\pi} S \dots \textcircled{1}$$

ϕ_a の波動関数繰り込みの条件は

$$\phi_a \rightarrow \sqrt{Z} \phi_a$$

$$\mathcal{L}_{3\text{-body}} = \frac{u_3}{m} \psi^\dagger \phi_a^\dagger \phi_a \psi \rightarrow \frac{u_3 Z}{m} \psi^\dagger \phi_a^\dagger \phi_a \psi$$

$$u_3 - \frac{g^2 u_3}{\pi} S \dots \textcircled{2}$$

①と②を合流せよ。 u_3 の変化は

$$\frac{du_3}{ds} = \frac{16}{3\pi} s^4 - \frac{11}{3\pi} s^2 u_3 + \frac{2}{3\pi} u_3^2$$

低工率近似 - 極限 $s \rightarrow \infty$ 2'', $s^2 \rightarrow \frac{\pi}{s}$ 4'' 2''.

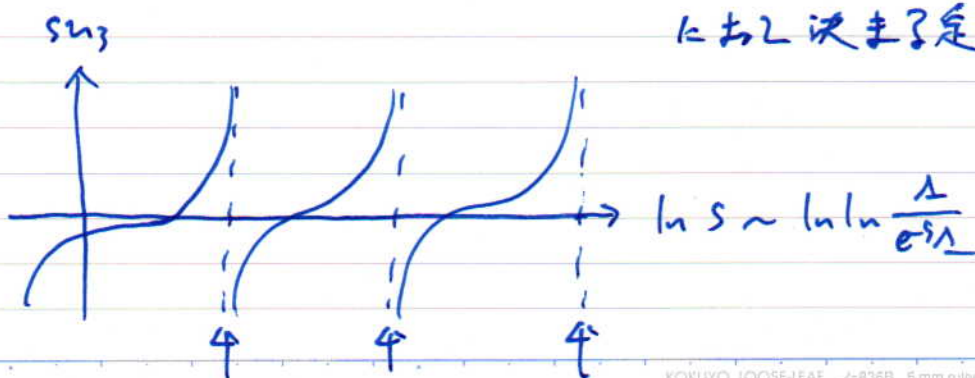
$$\frac{du_3}{ds} \rightarrow \frac{16\pi}{3s^2} - \frac{11}{3s} u_3 + \frac{2}{3\pi} u_3^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow s \frac{d(su_3)}{ds} &= s^2 \frac{du_3}{ds} + s u_3 \\ &= \frac{16\pi}{3} - \frac{8}{3} (su_3) + \frac{2}{3\pi} (su_3)^2 \\ \frac{d(su_3)}{d(\ln s)} &= \frac{2}{3\pi} [2\pi - (su_3)]^2 + \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

従って、 u_3 の低工率近似 - 2'' の振る舞いは

$$u_3 \rightarrow \frac{2\pi}{s} \left\{ 1 - \cot \left[\frac{4}{3} (\ln s - \theta) \right] \right\}$$

UVZ の初期条件
により決まった定数



$$\therefore n_3 \rightarrow \infty \quad \textcircled{\text{B}} \quad \frac{4}{3} (\ln S - \theta) = \pi n$$

$$\Leftrightarrow \ln S = \frac{3\pi n}{4} + \theta$$

||

$$\ln \ln \left(\frac{\Lambda}{e^{\theta} \Lambda} \right) = k \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{系の特徴的な} \\ \text{運動量スケール} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow k_n = \Lambda e^{-e^{3\pi n/4 + \theta}}$$

\Rightarrow 系の特徴的なエネルギースケールは

$$E_n \sim \frac{k_n^2}{m} \sim \frac{\Lambda^2}{m} e^{-2e^{3\pi n/4 + \theta}}$$

束縛エネルギー - \sim "見出し" \sim

\Rightarrow スーパーエフェクト!