冷却原子 (cold atoms)

→ 系を自由にデザインしコントロールできる
利点

- 量子統計、成分数、質量比 ⇐ 原子種
- 空間次元 ⇐ 光格子
- 粒子間相互作用 ⇐ フェッシュバッハ共鳴
- ...

→ 何ができるか?

ユニタリー極限 ⇒ (最)強相関、共形対称性

☆ 非相対論的な系における共形対称性
　とその物理的帰結

1. 冷却原子、ユニタリー極限、ゼロレンジ極限
2. スケール不変性とシュレーディンガー代数
3. 演算子状態対応、呼吸振動、体積粘性

☆ 共形対称性の破れとその物理的帰結

4. スケール対称性の量子力学的破れ
5. エフィモフ効果と普遍性
6. 繰り込み群によるスーパーエフィモフ効果

以下、$\hbar = 1$, $k_B = 1$,
　ただし、$c = 1$ ではない

☆ 原子種

アルカリ金属　Li　Na　K　Rb　Cs

$\boxed{{}^{6}Li}$　　${}^{39}K$
${}^{7}Li$　　$\boxed{{}^{40}K}$
　　　　${}^{41}K$

ボース粒子

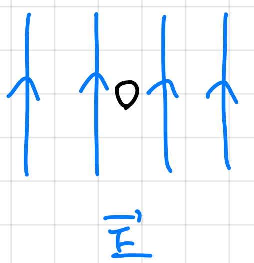
フェルミ粒子

アルカリ土類　Sr　$\underbrace{Yb}$

7つの安定同位体
(ボース粒子5つ、フェルミ粒子2つ)

☆ 光格子

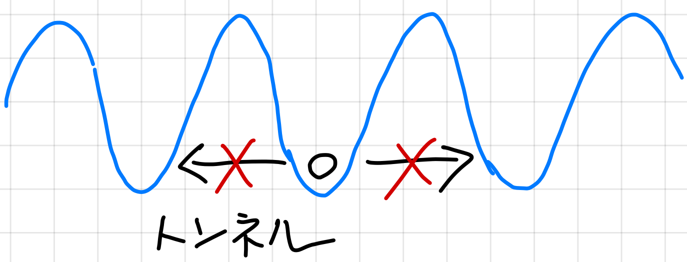
光と原子の相互作用



} 分極 $\vec{p} = \alpha \vec{E}$

⇒ ポテンシャルエネルギー

$$V = -\frac{\alpha}{2}|\vec{E}|^2$$

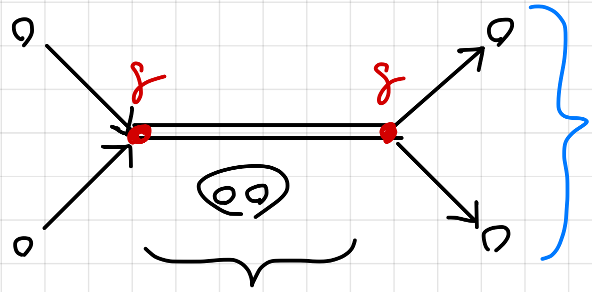


レーザーの定在波
$|\vec{E}|^2 \propto \cos^2 kz$

光格子による局在
⇒ 低次元系(2D, 1D)の実現

☆ フェッシュバッハ共鳴

2原子の散乱



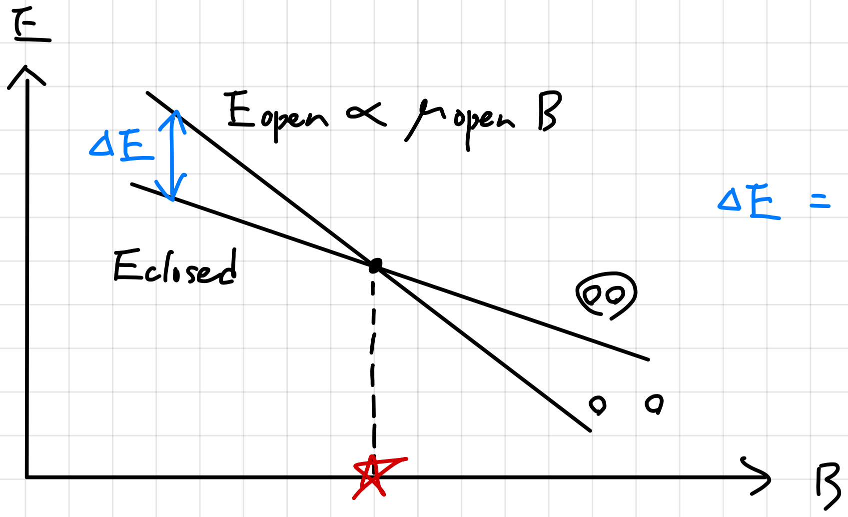
open channel

中間状態で分子の形成

closed channel

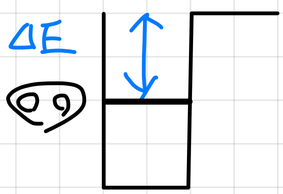
磁気モーメント

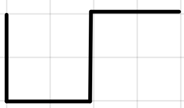
$\mu_{open} \neq \mu_{closed}$



$\Delta E = E_{closed} - E_{open}$

$\Delta E < 0$	$\Delta E > 0$
分子は安定	分子は不安定
⇕	⇕
強い引力	弱い引力



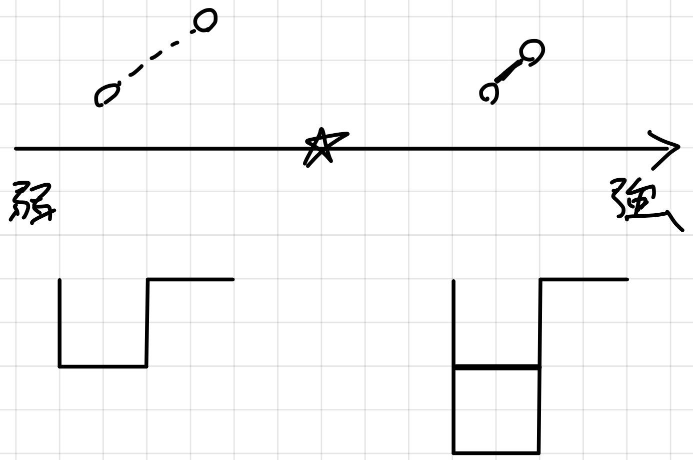


2次摂動での散乱振幅 $\propto \dfrac{g^2}{E_{open} - E_{closed}}$

∴ $\Delta E = 0$ の点で散乱が強められる。

フェッシュバッハ共鳴

☆ 散乱長とユニタリー極限



引力の強さ

⇕

s波散乱長 a

散乱振幅 $f_s(k) = \dfrac{-1}{ik - \underbrace{k\cot\delta(k)}_{\text{effective range 展開}}}$

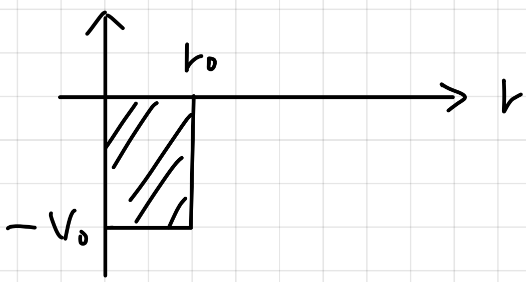
$$k\cot\delta = -\underbrace{\frac{1}{a}}_{\text{散乱長}} + \frac{1}{2}\underbrace{r_{\rm eff}}_{\text{effective range}} k^2 + \cdots$$

$$\therefore \frac{1}{a} = -\lim_{k\to 0} k\cot\delta$$

例）井戸型ポテンシャル

$$V(r) = -\underbrace{V_0}_{\text{引力の強さ}}\,\theta(\underbrace{r_0}_{\text{引力の到達距離（レンジ）}} - r)$$

$V_0 = \dfrac{\hbar_0^2}{m}$



Schrödinger 方程式（重心運動は分離）

$$\left[-\frac{\nabla^2}{m}+V(r)\right]\psi(\vec{r})=\underbrace{E}_{\frac{k^2}{m}}\psi(\vec{r})$$

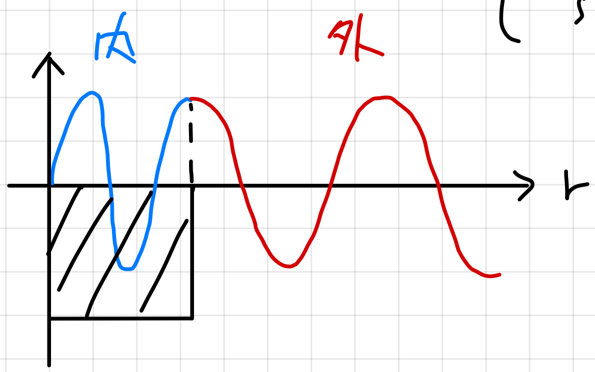
$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\hat{\Omega}}{r^2}$$

$$\underset{\text{s 波}}{\Longrightarrow}\left[-\partial_r^2-\frac{2}{r}\partial_r-u_0^2\,\theta(r_0-r)\right]\psi(r)=k^2\psi(r)$$

$$\underset{\psi=\frac{\chi}{r}}{\Longrightarrow}\left[-\partial_r^2-u_0^2\,\theta(r_0-r)\right]\chi(r)=k^2\chi(r)$$

$$\therefore\quad \chi''=\begin{cases}-(k^2+u_0^2)\chi & \text{for } r<r_0\\ -k^2\chi & \text{for } r>r_0\end{cases}$$

$$\propto\begin{cases}\sin\left(\sqrt{k^2+u_0^2}\,r\right)\\ \sin(kr+\underbrace{\delta}_{\text{phase shift}})\end{cases}$$



ポテンシャル内外の解の接続

$$\left.\frac{\chi'}{\chi}\right|_{r=r_0^-}=\left.\frac{\chi'}{\chi}\right|_{r=r_0^+}$$

$$\Longrightarrow\sqrt{k^2+u_0^2}\cot\left(\sqrt{k^2+u_0^2}\,r_0\right)=k\cot(kr_0+\delta)$$

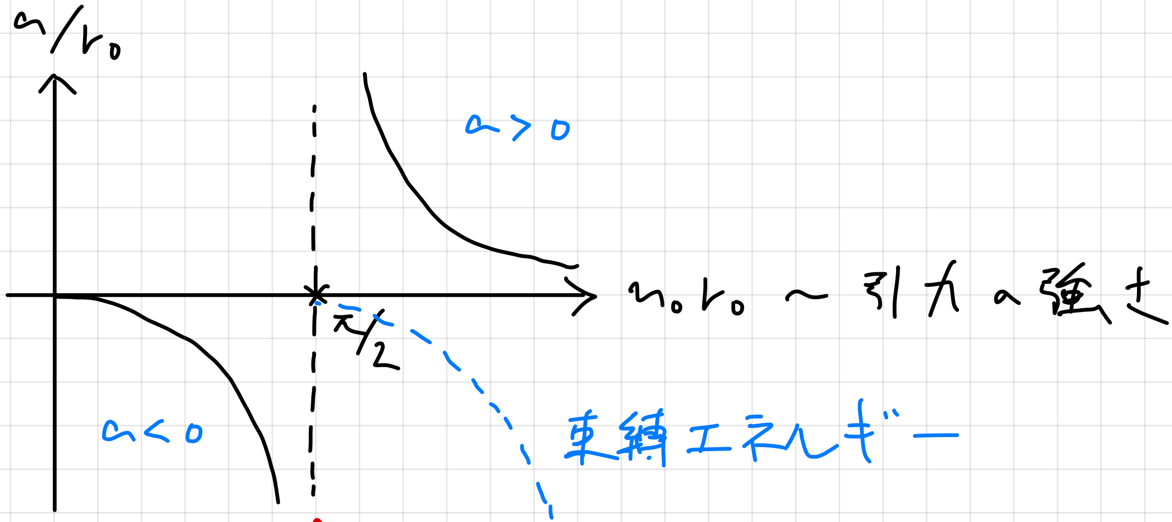
$$=k\,\frac{\cot(kr_0)\cot\delta-1}{\cot(kr_0)+\cot\delta}$$

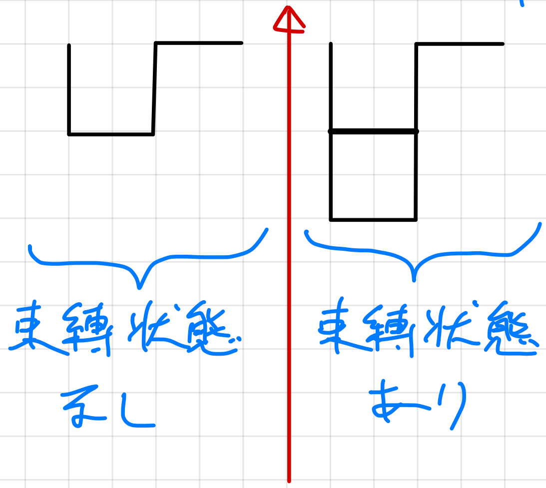
$\cot\delta$ について解くと、

$$k\cot\delta = k\,\frac{\sqrt{k^2+\kappa_0^2}\,\cot\left(\sqrt{k^2+\kappa_0^2}\,r_0\right)\cot(kr_0)+k}{k\cot(kr_0)-\sqrt{k^2+\kappa_0^2}\,\cot\left(\sqrt{k^2+\kappa_0^2}\,r_0\right)}$$

$$\xrightarrow[k\to 0]{} \frac{\kappa_0\cot(\kappa_0 r_0)}{1-\kappa_0 r_0\cot(\kappa_0 r_0)} \equiv -\frac{1}{a}$$

$$\therefore\ a = r_0 - \frac{1}{\kappa_0\cot(\kappa_0 r_0)} = r_0\left(1-\frac{\tan(\kappa_0 r_0)}{\kappa_0 r_0}\right)$$





s波散乱断面積

$$\sigma_s = 4\pi|f_s(k)|^2 \xrightarrow[k\to 0]{} 4\pi a^2$$

最大の散乱断面積の $a\to\infty$

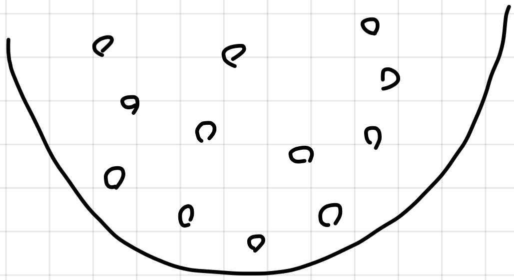
ユニタリー極限 ⇒ (最)強相関

引力の強さ	：	弱	→	中	→	強
a	：	-0	→	$\pm\infty$	→	$+0$
$1/a$	：	$-\infty$	→	0	→	$+\infty$
相関の強さ	：	小	→	大	→	小

☆ ゼロレンジ極限

系に存在する長さスケール

- 密度 n → 平均粒子間距離 $\ell \sim n^{-1/3} \sim 100\,\text{Å}$
- 温度 T → 熱ド・ブロイ波長 $\lambda \sim 1/\sqrt{mT} \gtrsim \ell$
- 相互作用 → 到達距離 $r_0 \sim 10\,\text{Å}$
  ↘ 散乱長 $a \sim$ 可変
  ($\to \infty$ の ユニタリー極限)



$$\Rightarrow \quad r_0 \ll \ell, \lambda, a$$

$$\underbrace{\downarrow \text{無視できる} \; 0}_{\text{ゼロレンジ極限}}$$

ゼロレンジ極限

⇒ 系の物理は n, T, a だけから決定され、ポテンシャルの詳細に依存しない。

普遍性!!!

冷却原子の物理

〜 希薄核(中性子)物質の物理

井戸型ポテンシャルの場合

$$\frac{\tan(u_0 r_0)}{u_0 r_0} = 1 - \frac{a}{r_0} \xrightarrow[\substack{r_0 \to 0 \\ a\text{固定}}]{} \infty$$

$u_0 r_0 = \frac{\pi}{2} + \epsilon$ とおくと、($\epsilon \ll 1$)

$$-\frac{2}{\pi}\frac{1}{\epsilon} = -\frac{a}{r_0} \Rightarrow \epsilon = \frac{2}{\pi}\frac{r_0}{a}$$

∴ $u_0 \xrightarrow[r_0 \to 0]{} \frac{\pi}{2r_0} + \frac{2}{\pi a}$ とすれば、a 固定

このとき

$$k\cot\delta = -\frac{1}{a} + \underbrace{\frac{1}{2} r_{eff} k^2 + \cdots}_{\to 0} \xrightarrow[r_0 \to 0]{} -\frac{1}{a} \text{ となる。}$$

- ユニタリー極限 $a \to \infty$ (r_0 固定)
- ゼロレンジ極限 $r_0 \to 0$ (a 固定)

2つの極限を同時にとると、
($a = \infty$ に固定して $r_0 \to 0$)

$$k\cot\delta(k) \to 0 \quad \left(\delta(k) \to \frac{\pi}{2}\right)$$

散乱振幅 $f_s(k) \to \frac{-1}{ik}$

スケールの無い相互作用！
(最強相関)

☆ ゼロレンジ極限の記述

1) 量子力学

Schrödinger方程式

$$\left[-\frac{\nabla^2}{m}+\underbrace{V(r)}_{}\right]\psi(r)=E\psi(r)$$

$$\lim_{r_0\to 0} V(r) = 0 \quad \text{for} \quad r>0$$

$$\Longrightarrow \quad -\frac{\nabla^2}{m}\psi(r)=\frac{k^2}{m}\psi(r) \quad \text{for} \quad r>0$$

$$\therefore \quad \psi(r) \propto \frac{\sin(kr+\delta)}{r}$$

$$\xrightarrow[kr\to 0]{} \frac{\sin\delta + kr\cos\delta}{r}$$

$$\propto \frac{1}{r}+\underbrace{k\cot\delta}_{-\frac{1}{a}}$$

つまり、$\psi(r)$ は $r>0$ で $-\frac{\nabla^2}{m}\psi(r)=E\psi(r)$ の解、

$r\to 0$ で $\psi(r)\propto\frac{1}{r}-\frac{1}{a}$ を満たす。

Bethe-Peierls の境界条件

← 相互作用

N体の場合も同様に、

"自由" Schrödinger 方程式を、

$$-\sum_{i=1}^{N}\frac{\nabla_i^2}{2m}\psi(\vec{r}_1,\cdots,\vec{r}_N) = E\psi(\vec{r}_1,\cdots,\vec{r}_N)$$

Bethe-Peierls の境界条件のもとで解く。

$$\lim_{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}\psi(\vec{r}_1,\cdots,\vec{r}_N) \propto \frac{1}{|\vec{r}_i-\vec{r}_j|}-\frac{1}{a}$$

あるいはフェルミの擬ポテンシャルを用いて、

$$V(r) = \frac{4\pi a}{m}\delta(\vec{r})\frac{\partial}{\partial r}r$$

$$\left[-\frac{\nabla^2}{m}+V(r)\right]\psi(r) = E\psi(r) \quad \text{for} \quad r \geq 0$$

とすれば、境界条件 $\psi|_{r\to 0} \propto \frac{1}{r}-\frac{1}{a}$ が

自動的に選ばれる。

(確認)

$$\left[-\frac{\nabla^2}{m}+V(r)\right]\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}\right)$$

$$= -\frac{1}{m}\nabla^2\frac{1}{r} - V(r)\frac{1}{a}$$

$$= -\frac{1}{m}(-4\pi)\delta(\vec{r}) - \frac{4\pi a}{m}\delta(\vec{r})\frac{1}{a}$$

$$= 0 \quad //$$