★ スケール不変性とシュレーディンガー代数

自由場の理論

$$S_{free} = \int dt\, d^d x\, \psi^\dagger(x) \left(i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m} \right) \psi(x) = \int dt\, L$$

$$\frac{\delta S_{free}}{\delta \psi^\dagger(x)} = 0 \Longrightarrow \left(i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m} \right) \psi(x) = 0$$

運動方程式

が持つ連続的対称性 $\Longleftrightarrow$ 保存量

ネーターの定理

- 内部対称性

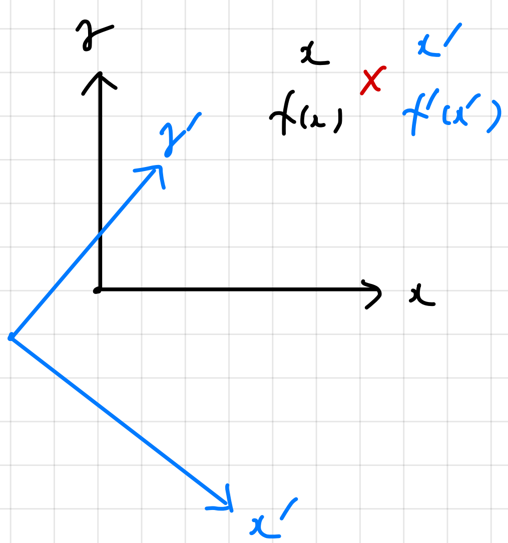
$$\psi(x) \to \psi'(x) = e^{i\theta} \psi(x)$$

- 並進対称性

$$\begin{cases} t \to t' = t + t_0 \\ \vec{x} \to \vec{x}' = \vec{x} + \vec{x}_0 \end{cases} \qquad \psi(x) \to \psi'(x') = \psi(x)$$

- 回転対称性

$$\vec{x}_i \to \vec{x}'_i = R_{ij} \vec{x}_j \qquad \psi(x) \to \psi'(x') = \psi(x)$$



• ガリレイ対称性

$$\begin{cases} t \to t' = t \\ \vec{x} \to \vec{x}' = \vec{x} + \vec{v}\,t \end{cases}$$

$$\underbrace{\phi'(x')}_{e^{-i\frac{(\vec{k}+m\vec{v})^2}{2m}t' + i(\vec{k}+m\vec{v})\cdot\vec{x}'}} = e^{i\frac{mv^2}{2}t + im\vec{v}\cdot\vec{x}}\ \underbrace{\phi(x)}_{e^{-i\frac{k^2}{2m}t + i\vec{k}\cdot\vec{x}}}$$

$$\phi(x) \to \phi'(x') = e^{i\frac{mv^2}{2}t + im\vec{v}\cdot\vec{x}}\ \phi(x)$$

(確認)

$$S_{free} = \int dt\, d\vec{x}\ \phi^\dagger(x)\left(i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m}\right)\phi(x)$$

$$= \int dt\, d\vec{x}\ \phi'^\dagger(t', \vec{x}')\ e^{i\frac{mv^2}{2}t + im\vec{v}\cdot\vec{x}}$$

$$\left(i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m}\right) e^{-i\frac{mv^2}{2}t - im\vec{v}\cdot\vec{x}}\ \phi'(t', \vec{x}')$$

$$= \int dt\, d\vec{x}\ \phi'^\dagger(t', \vec{x}')$$

$$\underbrace{\left(i\partial'_t + i\vec{v}\cdot\vec{\nabla}' + \frac{mv^2}{2} + \frac{(\vec{\nabla}' - im\vec{v})^2}{2m}\right)}_{\left(i\partial'_t + \frac{\nabla'^2}{2m}\right)}\ \phi'(t', \vec{x}')$$

$$= \int dt'\, d\vec{x}'\ \phi'^\dagger(x')\left(i\partial'_t + \frac{\nabla'^2}{2m}\right)\phi'(x')$$

変数変換

$$= S_{free}[\phi'] \quad //$$

• スケール対称性

$$\begin{cases} t \to t' = e^{-2s} t \\ \vec{x} \to \vec{x}' = e^{-s} t \end{cases} \qquad \psi(x) \to \psi'(x') = e^{\frac{d}{2}s} \psi(x)$$

(確認)

$$S_{free} = \int dt\, d\vec{x}\ \psi^\dagger(x) \left(i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m}\right) \psi(x)$$

$$= \int dt\, d\vec{x}\ e^{-ds}\ \psi'^\dagger(x') \left(i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m}\right) \psi'(x')$$

$$\partial_t = \frac{\partial t'}{\partial t}\partial_t' = e^{-2s}\partial_t'$$

$$\nabla_i = \frac{\partial x_j'}{\partial x_i}\nabla_j' = e^{-s}\nabla_i$$

$$= \underbrace{\int dt\, d\vec{x}\ e^{-2s}\ e^{-ds}}_{=\int dt'\, d\vec{x}'}\ \psi'^\dagger(x') \left(i\partial_t' + \frac{\nabla'^2}{2m}\right) \psi'(x')$$

変数変換

$$= S_{free}[\psi'] \quad //$$

• (非相対論的) 共形対称性

$$\begin{cases} t \to t' = \dfrac{t}{1-ct} & \left(t = \dfrac{t'}{1+ct'}\right) \\ \vec{x} \to \vec{x}' = \dfrac{\vec{x}}{1-ct} & \left(\vec{x} = \dfrac{\vec{x}'}{1+ct'}\right) \end{cases}$$

$$\psi(x) \to \psi'(x') = (1-ct)^{d/2}\ e^{i\frac{c}{1-ct}\frac{m}{2}x^2}\ \psi(x)$$

(確認)

$$S_{free} = \int dt\, d\vec{x}\ \psi^\dagger(x)\left(i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m}\right)\psi(x)$$

$$= \int dt\, d\vec{x}\ \psi'^\dagger(x')\,(1-ct)^{-d/2}\, e^{+i\frac{c}{1-ct}\frac{m}{2}x^2}$$

$$\left(i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m}\right)(1-ct)^{-d/2}\, e^{-i\frac{c}{1-ct}\frac{m}{2}x^2}\,\psi'(t',\vec{x}')$$

$$= \int dt\, d\vec{x}\ \psi'^\dagger(x')\,(1-ct)^{-d}$$

$$\Big[\, i\frac{\partial t'}{\partial t}\partial_{t'} + i\frac{\partial \vec{x}'}{\partial t}\cdot\vec{\nabla}' + \cancel{i\frac{d}{2}\frac{c}{1-ct}} + \cancel{\frac{c^2}{(1-ct)^2}\frac{m}{2}x^2}$$

$$+ \frac{1}{2m}\left(\frac{1}{1-ct}\vec{\nabla}'\right)^2 + \frac{1}{m}\left(-i\frac{c}{1-ct}m\vec{x}\right)\cdot\left(\frac{1}{1-ct}\vec{\nabla}'\right)$$

$$+ \cancel{\frac{1}{2m}\left(-i\frac{c}{1-ct}m\,d\right)} + \cancel{\frac{1}{2m}\left(-i\frac{c}{1-ct}m\vec{x}\right)^2}\,\Big]$$

$$\psi'(t',\vec{x}')$$

$$= \int dt\, d\vec{x}\ \psi'^\dagger(x')\,(1-ct)^{-d}$$

$$\Big[\, i\left(\frac{1}{1-ct} + \frac{ct}{(1-ct)^2}\right)\partial_{t'} + \cancel{i\frac{c}{(1-ct)^2}\vec{x}\cdot\vec{\nabla}'}$$

$$+ \frac{1}{2m}\frac{1}{(1-ct)^2}\nabla'^2 - \cancel{i\frac{c}{(1-ct)^2}\vec{x}\cdot\vec{\nabla}'}\,\Big]\ \psi'(t',\vec{x}')$$

$$= \underbrace{\int dt\, d\vec{x}\ (1-ct)^{-d-2}}_{=\int dt'\, d\vec{x}'}\ \psi'^\dagger(x')\left(i\partial_{t'} + \frac{\nabla'^2}{2m}\right)\psi'(x')$$

変数変換

$$= S_{free}[\psi']\ //$$

古典場の理論 ⟹ 量子場の理論
場の量子化

（一体の量子力学 ⟹ 多体の量子力学
第二量子化）

量子化 $\psi(x) \to \hat{\psi}(x)$ ：演算子

共役運動量 $\hat{\pi}(x) = \dfrac{\delta S_{free}}{\delta \dot{\psi}(x)} = i\hat{\psi}^{\dagger}(x)$

正準交換関係 $[\hat{\psi}(\vec{x}), \underbrace{\hat{\pi}(\vec{y})}_{\cancel{i}\hat{\psi}^{\dagger}(\vec{y})}] = \cancel{i}\,\delta(\vec{x}-\vec{y})$

ハミルトニアン

$$\hat{H} = \int d\vec{x}\, \pi(x)\,\dot{\psi}(x) - L$$
$$= \int d\vec{x}\left[-\hat{\psi}^{\dagger}(x)\frac{\nabla^2}{2m}\hat{\psi}(x)\right]$$

変換 $\hat{\psi}(x) \to \hat{\psi}'(x) = e^{-i\lambda\hat{G}}\,\hat{\psi}(x)\,e^{i\lambda\hat{G}}$

$\hat{G}$：生成子

対称変換であれば、保存量

無限小変換 $\delta\hat{\psi}(x) = \hat{\psi}'(x) - \hat{\psi}(x)\big|_{\lambda\to 0}$

$$= -i\lambda\,[\hat{G}, \hat{\psi}(x)]$$

- スケール変換

$$\delta\hat{\phi}(x) = \phi'(x) - \phi(x)$$

$$= e^{\frac{d}{2}s}\phi(e^{2s}t, e^{s}\vec{x}) - \phi(x)$$

$$\xrightarrow[s\to 0]{} s\left(\frac{d}{2} + \vec{x}\cdot\vec{\nabla} + 2t\partial_t\right)\hat{\phi}(x)$$

$$\equiv -is[\hat{D}, \hat{\phi}(x)]$$

$$\hat{D} = \hat{D}_t - 2t\hat{H} \qquad [\hat{H}, \hat{\phi}(x)] = -i\partial_t\hat{\phi}(x)$$

$$\boxed{\hat{D}_t = \int d\vec{x}\, \vec{x}\cdot \underbrace{\frac{\phi^\dagger(-i\vec{\nabla}\hat{\phi}) + (i\vec{\nabla}\hat{\phi}^\dagger)\hat{\phi}}{2}}_{m\hat{\vec{j}}\ :\ \text{current density}}} \qquad \hat{\phi} = \hat{\phi}(x) = \hat{\phi}(t, \vec{x})$$

(確認)

$$\hat{D}_t = \int d\vec{x}\left(-i\frac{d}{2}\hat{\phi}^\dagger\hat{\phi} - i\vec{x}\cdot\phi^\dagger\vec{\nabla}\phi\right) \quad \text{より}$$

$$[\hat{\phi}(x), \hat{D}_t] = \left(-i\frac{d}{2} - i\vec{x}\cdot\vec{\nabla}\right)\phi(x) \quad //$$

$$\frac{d}{dt}\hat{D} = i\underbrace{[\hat{H}, \hat{D}]}\ - 2\hat{H}$$

有限変換 $e^{-is\hat{D}}\hat{\phi}(x)e^{is\hat{D}} = e^{\frac{d}{2}s}\hat{\phi}(e^{2s}t, e^{s}\vec{x})$

特に、$t=0$ とすると、

$$e^{-is\hat{D}}\hat{\phi}(\vec{x})e^{is\hat{D}} = e^{\frac{d}{2}s}\hat{\phi}(e^{s}\vec{x})$$

$$\Rightarrow \quad e^{-is\hat{D}}\ \hat{H}\ e^{is\hat{D}}$$

$$= \underbrace{\int d\vec{x}\ e^{ds}}_{d\vec{x}'} \left[-\hat{\psi}^\dagger(\underbrace{e^s\vec{x}}_{\vec{x}'}) \frac{\overbrace{\nabla^2}}{2m}_{e^{2s}\nabla'^2} \hat{\psi}(\underbrace{e^s\vec{x}}_{\vec{x}'}) \right]$$

$$= e^{2s} \int d\vec{x}' \left[-\hat{\psi}^\dagger(\vec{x}') \frac{\nabla'^2}{2m} \hat{\psi}(\vec{x}') \right]$$

$$= e^{2s}\ \hat{H}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{H} - is[\hat{D}, \hat{H}] + O(s^2) = \hat{H} + 2s\hat{H} + O(s^2)$$

$$\Rightarrow \quad [\hat{D}, \hat{H}] = 2i\hat{H}$$

$\therefore \ \frac{d}{dt}\hat{D} = 2\hat{H} - 2\hat{H} = 0$ なので、保存する.

特に、$\hat{D} = \hat{D}_t - 2t\hat{H} \Big|_{t=0} = \hat{D}_{t=0}$

- 共形変換

$$\delta\hat{\psi}(x) = \psi'(x) - \psi(x)$$

$$= (1+ct)^{-d/2}\, e^{i\frac{c}{1+ct}\frac{m}{2}x^2}\, \psi\left(\frac{t}{1+ct}, \frac{\vec{x}}{1+ct}\right)$$

$$- \psi(x)$$

$$\xrightarrow[c\to 0]{} c\left(i\frac{m}{2}x^2 - t\frac{d}{2} - t\vec{x}\cdot\vec{\nabla} - t^2\partial_t \right)\hat{\psi}(x)$$

$$= -ic[\hat{C}, \hat{\psi}(x)]$$

$$\hat{C}_t - t\hat{D}_t + t^2\hat{H} \;(= \hat{C})$$

$$\boxed{\hat{C}_t = \frac{m}{2}\int d\vec{x}\, x^2 \underbrace{\hat{\psi}^\dagger \hat{\psi}}_{\hat{n}\,:\ \text{number density}}}$$

〜 調和振動子ポテンシャル

(確認)

$$[\hat{\psi}(x), \hat{C}_t] = \frac{m}{2} x^2 \hat{\psi}(x) \;//$$

$$\frac{d}{dt}\hat{C} = \underbrace{i[\hat{H}, \hat{C}]}\; - \hat{D}_t + 2t\hat{H}$$

有限変換 $e^{-ic\hat{C}} \hat{\psi}(x)\, e^{ic\hat{C}}$

$$= (1+ct)^{-1/2}\, e^{i\frac{c}{1+ct}\frac{m}{2}x^2}\, \hat{\psi}\left(\frac{t}{1+ct}, \frac{\vec{x}}{1+ct}\right)$$

特に $t=0$ とすると、

$$e^{-ic\hat{C}} \hat{\psi}(\vec{x})\, e^{ic\hat{C}} = e^{ic\frac{m}{2}x^2} \hat{\psi}(\vec{x})$$

$$\Rightarrow \quad e^{-ic\hat{C}} \hat{H}\, e^{ic\hat{C}}$$

$$= \int d\vec{x}\, \hat{\psi}^\dagger(\vec{x})\, e^{-ic\frac{m}{2}x^2} \left[-\frac{\nabla^2}{2m} e^{ic\frac{m}{2}x^2} \hat{\psi}(\vec{x})\right]$$

$$= \int d\vec{x} \left[-\hat{\psi}^\dagger(\vec{x}) \frac{\nabla^2}{2m} \hat{\psi}(\vec{x}) - ic\vec{x}\cdot \hat{\psi}^\dagger(\vec{x}) \vec{\nabla} \hat{\psi}(\vec{x}) - ic\frac{d}{2} \hat{\psi}^\dagger(\vec{x}) \hat{\psi}(\vec{x}) + c^2 \frac{m}{2} x^2 \hat{\psi}^\dagger(\vec{x}) \hat{\psi}(\vec{x}) \right]$$

$$= \hat{H} + c\hat{D}_{t=0} + c^2 \hat{C}_{t=0}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{H} - ic[\hat{C}, \hat{H}] - \frac{c^2}{2}[\hat{C}, [\hat{C}, \hat{H}]] + O(c^3)$$

$$= \hat{H} + c\underbrace{\hat{D}_{t=0}}_{\hat{D}} + c^2 \hat{C}_{t=0}$$

$$\Rightarrow \quad [\hat{C}, \hat{H}] = i\hat{D}$$

$\therefore \frac{d}{dt}\hat{C} = \hat{D} - \hat{D} = 0$ なので 保存する.

特に、$\hat{C} = \hat{C}_t - t\hat{D}_t + t^2 \hat{H} \big|_{t=0} = \hat{C}_{t=0}$

また、$[\hat{C}, \underbrace{[\hat{C}, \hat{H}]}_{i\hat{D}}] = -2 \underbrace{\hat{C}_{t=0}}_{\hat{C}}$ より.

$$[\hat{D}, \hat{C}] = -2i\hat{C}$$

従って、自由場に対して

$$\boxed{[\hat{D}, \hat{H}_0] = 2i\hat{H}_0, \quad [\hat{C}, \hat{H}_0] = i\hat{D}, \quad [\hat{D}, \hat{C}] = -2i\hat{C}}$$

シュレーディンガー代数（の一部）

SO(2,1)

$\hat{N}, \vec{P}, \vec{L}, \vec{K}$

$\vec{K} = \int d\vec{x}\, \vec{x}\, \hat{n}(x) - t\vec{P}$

$$\hat{H}_0 = \int d\vec{x} \left[-\hat{\psi}^\dagger(\vec{x}) \frac{\nabla^2}{2m} \hat{\psi}(\vec{x}) \right]$$

相互作用する多粒子系を記述するハミルトニアン

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \frac{1}{2}\int d\vec{x}\, d\vec{y}\; \hat{\psi}^\dagger(\vec{x})\hat{\psi}(\vec{x})\, V(\vec{x}-\vec{y})\, \hat{\psi}^\dagger(\vec{y})\hat{\psi}(\vec{y})$$

- $e^{-is\hat{D}}\hat{\psi}(\vec{x})e^{is\hat{D}} = e^{\frac{d}{2}s}\hat{\psi}(e^s\vec{x})$ より.

$$e^{-is\hat{D}}\hat{H}e^{is\hat{D}}$$

$$= e^{2s}\hat{H}_0 + \frac{1}{2}\int \underbrace{d\vec{x}\, d\vec{y}\; e^{2ds}}_{d\vec{x}'d\vec{y}'}\; \hat{\psi}^\dagger(e^s\underbrace{\vec{x}}_{}^{\vec{x}'})\,\hat{\psi}(e^s\vec{x})$$

$$\times \underbrace{V(\vec{x}-\vec{y})}_{V(e^{-s}\vec{x}'-e^{-s}\vec{y}')}\; \hat{\psi}^\dagger(\underbrace{e^s\vec{y}}_{\vec{y}'})\,\hat{\psi}(\underbrace{e^s\vec{y}}_{\vec{y}'})$$

$$= e^{2s}\Big[\hat{H}_0 + \frac{1}{2}\int d\vec{x}'d\vec{y}'\; \hat{\psi}^\dagger(\vec{x}')\hat{\psi}(\vec{x}')$$

$$\times \underbrace{e^{-2s}V(e^{-s}(\vec{x}'-\vec{y}'))}_{V'(\vec{x}'-\vec{y}')}\; \hat{\psi}^\dagger(\vec{y}')\hat{\psi}(\vec{y}')\Big]$$

$$= e^{2s}\hat{H}'$$

$\therefore\ V(\vec{r}) \to V'(\vec{r}) = e^{-2s}V(e^{-s}\vec{r})$ と変化するが、

$V'(\vec{r}) = V(\vec{r})$ であれば、$\hat{H}' = \hat{H}$ となる.

スケール不変な相互作用!

$\Rightarrow\ [\hat{D}, \hat{H}] = 2i\hat{H}$ が成立

$\therefore\ \hat{D} = \hat{D}_t - 2t\hat{H}$ は保存する.

・ $e^{-ic\hat{C}}\hat{\psi}(\vec{x})e^{ic\hat{C}} = e^{ic\frac{m}{2}x^2}\hat{\psi}(\vec{x})$ より、

$$e^{-ic\hat{C}}\hat{H}e^{ic\hat{C}}$$

$$= \underbrace{e^{-ic\hat{C}}\hat{H}_0 e^{ic\hat{C}}}_{\hat{H}_0 + c\hat{D}_{t=0} + c^2\hat{C}_{t=0}} + \frac{1}{2}\left(\int d\vec{x}\int d\vec{y}\ \hat{\psi}^\dagger(\vec{x})\hat{\psi}(\vec{x}) \times V(\vec{x}-\vec{y})\hat{\psi}^\dagger(\vec{y})\hat{\psi}(\vec{y})\right)$$

$$= \hat{H} + c\underbrace{\hat{D}_{t=0}}_{\hat{D}} + c^2\hat{C}_{t=0}$$

$$\Rightarrow\ -ic[\hat{C},\hat{H}] = c\hat{D} \qquad \Rightarrow\ [\hat{C},\hat{H}] = i\hat{D}$$

$$-\frac{c^2}{2}[\hat{C},\underbrace{[\hat{C},\hat{H}]}_{i\hat{D}}] = c^2\hat{C}_{t=0}$$

$\therefore\ \hat{C} = \hat{C}_t - t\hat{D}_t + t^2\hat{H}$ は保存するので、

$[\hat{D},\hat{C}] = -2i\hat{C}$ も成立

従って、相互作用がスケール不変ならば

$$\boxed{[\hat{D},\hat{H}] = 2i\hat{H},\quad [\hat{C},\hat{H}] = i\hat{D},\quad [\hat{D},\hat{C}] = -2i\hat{C}}$$

スケール不変な相互作用の例

$$V(\lambda\vec{r}) = \lambda^{-2} V(\vec{r})$$

0) $V(\vec{r}) = 0$

1) $V(\vec{r}) = \dfrac{g}{r^2}$ for any d

2) $V(\vec{r}) = g\,\delta^2(\vec{r})$ for $d=2$

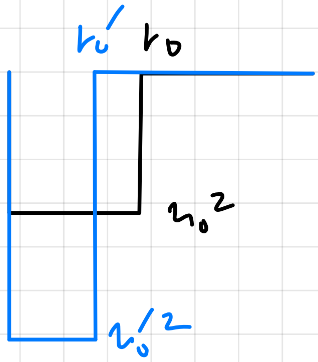
3) ゼロレンジ相互作用
 @ユニタリー極限 for $d=3$

ただし、量子異常により破れる場合アリ

$$V(r) = -\frac{\kappa_0^2}{m}\,\theta(r_0 - r)$$

$$\Rightarrow V'(r) = -\lambda^2 \frac{\kappa_0^2}{m}\,\theta(r_0 - \lambda r)$$

$$= -\frac{\kappa_0'^2}{m}\,\theta(r_0' - r)$$



$$r_0 \to r_0' = \frac{r_0}{\lambda}, \quad \kappa_0 \to \kappa_0' = \lambda \kappa_0$$

散乱長 $a = r_0\left(1 - \dfrac{\tan(\kappa_0 r_0)}{\kappa_0 r_0}\right) \to a' = \dfrac{a}{\lambda}$

$r_0 \kappa_0 = \dfrac{\pi}{2}$ とすると、

$r_0' \kappa_0' = \dfrac{\pi}{2}$ なので、$a = a' = \infty$

ゼロレンジ極限 $r_0 \to 0$ において $r_0' \to 0$ なので、

$$k\cot\delta \to 0 \leftarrow k\cot\delta'$$

$$\therefore V(r) = V'(r)$$