☆ 演算子・状態対応 (operator-state correspondence)

✓ 自由場の理論の局所演算子

$$\underbrace{H_0}_{2} = \underbrace{\int d^dx}_{-d}\ \underbrace{\hat{\phi}^\dagger}_{\frac{d}{2}} \Big(-\underbrace{\frac{\nabla^2}{2m}}_{2}\Big) \underbrace{\hat{\phi}}_{\frac{d}{2}}$$

$[p] = 1,$

$[E] = [\frac{p^2}{2m}] = 2$

$[x] = [\hbar/p] = -1$

$[t] = [\hbar/E] = -2$

例) $\hat{O} = \hat{\phi}$

次元 $\Delta_O = \frac{d}{2}$

粒子数 $N_O = 1$

$\hat{O} = \hat{\phi}^2$

$\Delta_O = \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = d$

$N_O = 2$

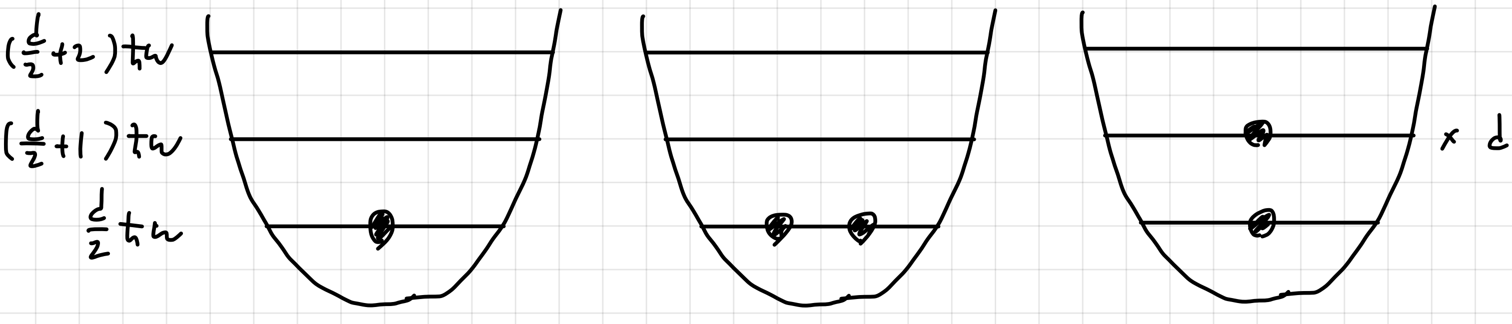
$\hat{O} = \hat{\phi} \nabla_i \hat{\phi} \quad (i = 1, 2, \cdots, d)$

$\Delta_O = d + 1$

$N_O = 2$

✓ 調和振動子中のエネルギー固有状態

粒子数 $N = 1$　　　　$N = 2$　　　　$N = 2$



$E = \frac{d}{2}\hbar\omega$　　　　$E = d\,\hbar\omega$　　　　$E = (d+1)\hbar\omega$

$\Rightarrow$ 場の理論の局所演算子の次元 Δ_O

$\Updownarrow \quad E = \Delta_O \hbar\omega$

調和振動子中のエネルギー固有値 E

スケール不変性の帰結!

局所演算子

$$\hat{O}(t,\vec{x}) = e^{i\hat{H}t - i\hat{\vec{P}}\cdot\vec{x}}\,\underbrace{O(0,\vec{0})}_{\equiv O}\,e^{-i\hat{H}t + i\hat{\vec{P}}\cdot\vec{x}}$$

スケール変換

$$e^{-is\hat{D}}\,\hat{O}(t,\vec{x})\,e^{is\hat{D}} = e^{\Delta_O s}\,\hat{O}(e^{2s}t, e^{s}\vec{x})$$

$\hat{O}$ のスケール次元

$\hat{O} = \hat{\phi}$ のとき $\Delta_O = \frac{d}{2}$

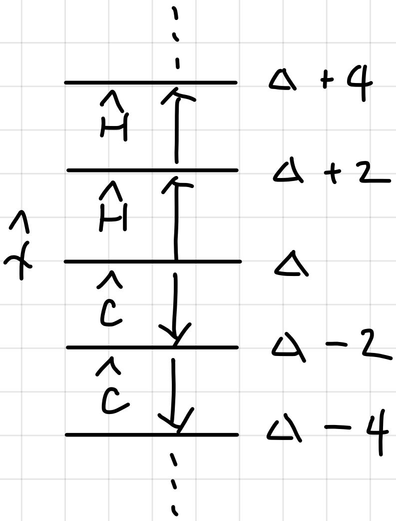
$t=0,\ \vec{x}=\vec{0}$ とおいて

$$e^{-is\hat{D}}\,\hat{O}\,e^{is\hat{D}} = e^{\Delta_O s}\,\hat{O} \Rightarrow [\hat{D},\hat{O}] = i\Delta_O\hat{O}$$

$[\hat{D},\hat{H}] = 2i\hat{H}$, $[\hat{D},\hat{C}] = -2i\hat{C}$ より.

$[\hat{H},\hat{O}] = \hat{O}'$ とすると、

$$\begin{aligned}[\hat{D},\hat{O}'] &= [\hat{D},[\hat{H},\hat{O}]] \\ &= [\hat{H},\underbrace{[\hat{D},\hat{O}]}_{i\Delta_O\hat{O}}] + [\underbrace{[\hat{D},\hat{H}]}_{2i\hat{H}},\hat{O}] \\ &= i\underbrace{(\Delta_O+2)}_{\Delta_{O'}}\underbrace{[\hat{H},\hat{O}]}_{\hat{O}'}\end{aligned}$$



∴ $\hat{O}' = [\hat{H},[\hat{H},\cdots,[\hat{H},\hat{O}]\cdots]]$

のスケール次元は

$$\Delta_{O'} = \Delta_O + 2 + 2 + \cdots + 2$$

同様に、 $\hat{O}' = [\hat{C}, [\hat{C}, \cdots, [\hat{C}, \hat{O}]\cdots]]$ のスケール次元は

$\Delta_{O'} = \Delta_O - 2 - 2 - \cdots - 2$ となるが、

$\Delta \geq \frac{d}{2}$ (unitarity bound) が示せるので、

$[\hat{C}, \hat{O}] = 0$ となる $\underbrace{\hat{O}}_{\equiv \hat{O}_{pri}}$ が存在する。

$\equiv \hat{O}_{pri}$: プライマリ演算子

(証明)

調和振動子ハミルトニアン

$$\hat{H}_w \equiv \hat{H} + \int d\vec{x} \left(\frac{m}{2} w^2 x^2 \hat{\phi}^\dagger(\vec{x}) \hat{\phi}(\vec{x}) \right)$$

$$= \hat{H} + w^2 \hat{C}$$

真空

状態 $|O\rangle \equiv e^{-\hat{H}/w} \hat{O}_{pri} |0\rangle$ に対して

$$\hat{H}_w |O\rangle = e^{-\hat{H}/w} \underbrace{e^{\hat{H}/w} \hat{H}_w e^{-\hat{H}/w}}_{} \hat{O}_{pri} |0\rangle$$

$$\underbrace{\hat{H}_w}_{\hat{H} + w^2 \hat{C}} + \frac{1}{w} \underbrace{[\hat{H}, \hat{H}_w]}_{\substack{w^2 [\hat{H}, \hat{C}] \\ = -i w^2 \hat{D}}} + \frac{1}{2w^2} \underbrace{[\hat{H}, [\hat{H}, \hat{H}_w]]}_{\substack{-i w^2 [\hat{H}, \hat{D}] \\ = -2 w^2 \hat{H}}} + \underbrace{\cdots}_{0}$$

$$= e^{-\hat{H}/w} \left(\cancel{\hat{H}} + w^2 \hat{C} - i w \hat{D} \cancel{- \hat{H}} \right) \hat{O}_{pri} |0\rangle$$

$$= e^{-\hat{H}/w} \left(w^2 \underbrace{[\hat{C}, \hat{O}_{pri}]}_{0} - i w \underbrace{[\hat{D}, \hat{O}_{pri}]}_{i \Delta_O \hat{O}_{pri}} \right) |0\rangle$$

$$= \underbrace{\Delta_O w}_{E} \underbrace{e^{-\hat{H}/w} \hat{O}_{pri} |0\rangle}_{|O\rangle} \quad //$$

⇒ スケール次元 Δ_a のプライマリ演算子 $\hat{O}_{pri}$ に対して
エネルギー $E = \Delta_a \hbar\omega$ のエネルギー固有状態が存在

$$\Delta_a \rightleftarrows E = \Delta_a \hbar\omega$$

OPE などに必要

実験で測れる
数値計算が容易

演算子積展開

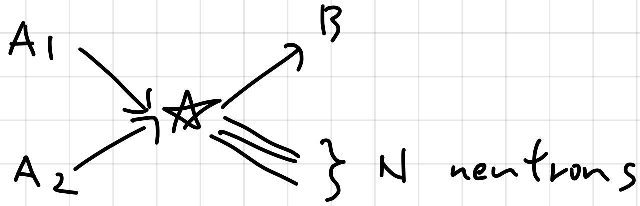
$$\underbrace{\hat{O}_A(\vec{x})\,\hat{O}_B(\vec{0})}_{\Delta_A + \Delta_B} = \sum_C \underbrace{W_C(\vec{x})}_{} \underbrace{\hat{O}_C(\vec{0})}_{\Delta_C}$$

次元 $\Delta_A + \Delta_B - \Delta_C$

$$\therefore\ W_C(\vec{x}) \sim x^{\Delta_C - \Delta_A - \Delta_B}$$

⇒ 近距離 $x \sim 0$ では
小さい Δ_C を持つ演算子が重要！

最近の進展 : nonrelativistic unparticle physics
(Hammer, Son, Braaten, 2021)

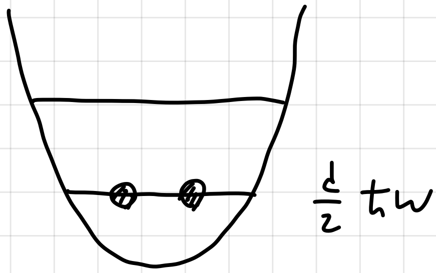


$$\frac{d\sigma}{dE} \sim E^{\Delta_N - \frac{5}{2}}$$

N粒子演算子のユニタリー極限
のスケール次元

例) 1粒子演算子 $\hat{O}_1 = \hat{\psi} \Rightarrow \Delta_O = \frac{d}{2}$

2粒子演算子



$\hat{O}_2 = \hat{\psi}^2$

自由場（相互作用なし） $\Delta_O = d$

しかし、相互作用があると、

$\Delta_O \neq d$ ← 異常次元

2粒子状態 $|\vec{x},\vec{y}\rangle = \hat{\psi}^\dagger(\vec{x})\hat{\psi}^\dagger(\vec{y})|0\rangle$

一般の状態ベクトル $|\Psi\rangle$ の波動関数

$$\Psi(\vec{x},\vec{y}) = \langle \vec{x},\vec{y}|\Psi\rangle \to \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} \quad (\vec{y}\to\vec{x})$$

Bethe-Peierls の境界条件

$$= \langle 0|\underbrace{\hat{\psi}(\vec{y})\hat{\psi}(\vec{x})}|\Psi\rangle$$ @ ユニタリー極限

$$\to \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}$$

∴ $\hat{\psi}(\vec{y})\hat{\psi}(\vec{x})$ の行列要素が $\vec{y}\to\vec{x}$ で有限になるためには、

$$\hat{O}_2(\vec{x}) = \underbrace{\lim_{\vec{y}\to\vec{x}} |\vec{x}-\vec{y}|\,\hat{\psi}(\vec{y})\hat{\psi}(\vec{x})}_{\text{繰り込まれた局所演算子}}$$

$\Rightarrow \Delta_O = d \underbrace{-1}_{\text{異常次元}} = 2$ ∴ $E_{unitary} = 2\hbar\omega$

↕

$E_{free} = 3\hbar\omega$

シュレーディンガー代数

$$\boxed{[\hat{D}, \hat{H}] = 2i\hat{H}, \quad [\hat{C}, \hat{H}] = i\hat{D}, \quad [\hat{D}, \hat{C}] = -2i\hat{C}}$$

$$\hat{H}_\omega = \hat{H} + \omega^2 \hat{C}$$

$$\hat{L}_\pm = \hat{H} - \omega^2 \hat{C} \pm i\omega \hat{D}$$

$$\Rightarrow \quad [\hat{H}_\omega, \hat{L}_\pm]$$

$$= [\hat{H}, -\omega^2\hat{C} \pm i\omega\hat{D}] + \omega^2[\hat{C}, \hat{H} \pm i\omega\hat{D}]$$

$$= i\omega^2\hat{D} \pm 2\omega\hat{H} + i\omega^2\hat{D} \mp 2\omega^3\hat{C}$$

$$= \pm 2\omega(\hat{H} - \omega^2\hat{C} \pm i\omega\hat{D})$$

$$= \pm 2\omega\hat{L}_\pm$$

$$[\hat{L}_+, \hat{L}_-]$$

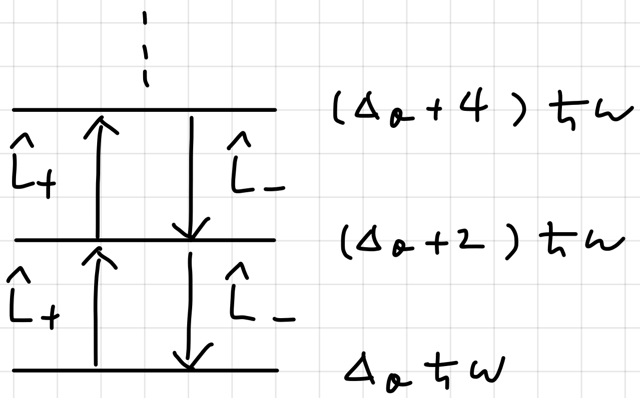
$$= [\hat{H} - \omega^2\hat{C}, -i\omega\hat{D}] + [i\omega\hat{D}, \hat{H} - \omega^2\hat{C}]$$

$$= 2i\omega(2i\hat{H} - 2i\omega^2\hat{C})$$

$$= -4\omega\hat{H}_\omega$$

$$\therefore \quad \boxed{[\hat{H}_\omega, \hat{L}_\pm] = \pm 2\omega\hat{L}_\pm, \quad [\hat{L}_+, \hat{L}_-] = -4\omega\hat{H}_\omega}$$

調和振動子ハミルトニアン　　　昇降演算子



$\hat{O}_{pri} \Rightarrow |0\rangle$

調和振動子ハミルトニアンで時間発展する

任意の状態 $|\Psi_t\rangle = e^{-i\hat{H}_\omega t}|\Psi_0\rangle$

$$\hat{C} = \frac{m}{2}\underbrace{\int d\vec{x}\; x^2\, \hat{\psi}^\dagger(\vec{x})\,\hat{\psi}(\vec{x})}_{\text{二乗半径}}$$ の期待値

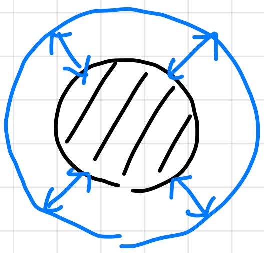
$$\langle \Psi_t|\hat{C}|\Psi_t\rangle$$

$$= \langle\Psi_0|\underbrace{e^{i\hat{H}_\omega t}\,\frac{2\hat{H}_\omega - \hat{L}_+ - \hat{L}_-}{4\omega^2}\,e^{-i\hat{H}_\omega t}}_{\frac{2\hat{H}_\omega - e^{-2i\omega t}\hat{L}_+ - e^{2i\omega t}\hat{L}_-}{4\omega^2}}|\Psi_0\rangle$$

$$= \frac{\langle\Psi_0|\hat{H}_\omega|\Psi_0\rangle - \cos(2\omega t+\varphi)\,|\langle\Psi_0|L_+|\Psi_0\rangle|}{2\omega^2}$$

$\Longrightarrow$ 調和振動子中の平均二乗半径の時間発展

$$\langle x^2\rangle = A - B\cos(2\omega t+\varphi)$$



breathing mode (呼吸振動) の振動数は 2ω であり、減衰しない

$\Uparrow$

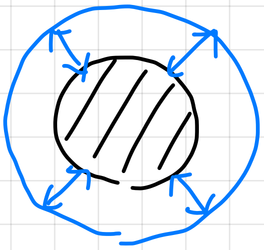
スケール不変な相互作用を持つ任意の系に対して exact!
(特に、強相関・多体系でもOK)

系が強相関多体系する

低エネルギー物理は流体力学

体積粘性、ずり粘性、熱伝導率

ζ　　　η　　　κ



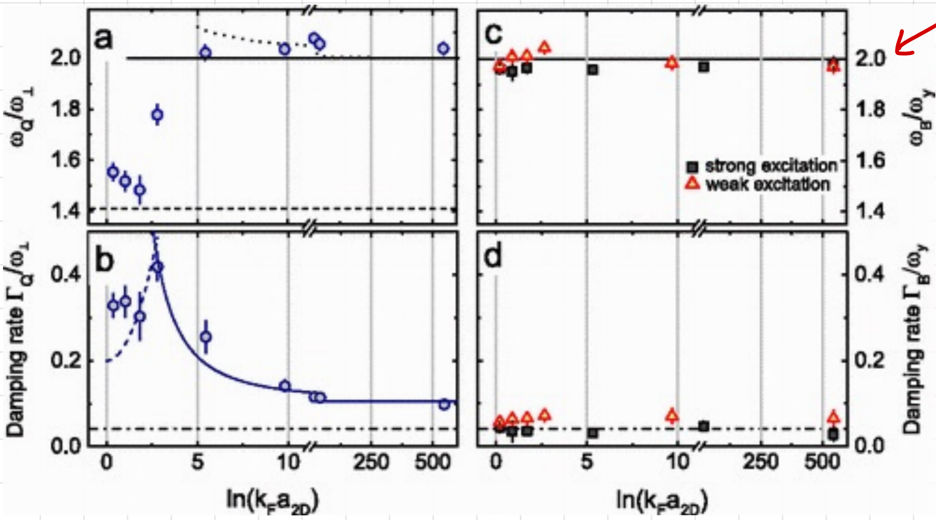
流体の等方的な膨張・収縮に伴う摩擦

⇓

ζ は breathing mode を減衰させる。

∴ スケール不変な相互作用を持つ系の体積粘性はゼロ

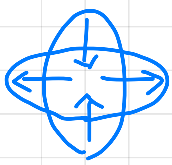
• 2次元 δ 相互作用フェルミ気体
(Vogt et al., PRL 108, 070404 (2012))



振動数

減衰率

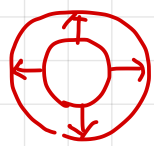
quadrupole



⇑

η で減衰

monopole



⇑

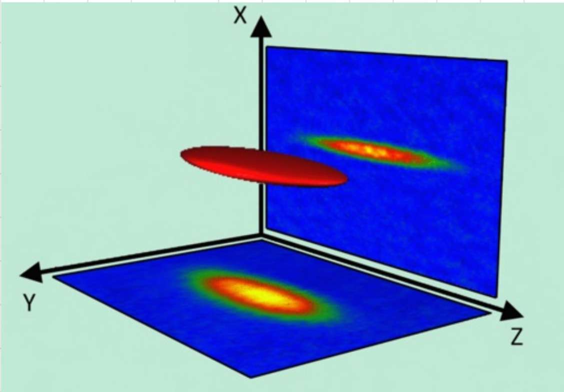
ζ で減衰

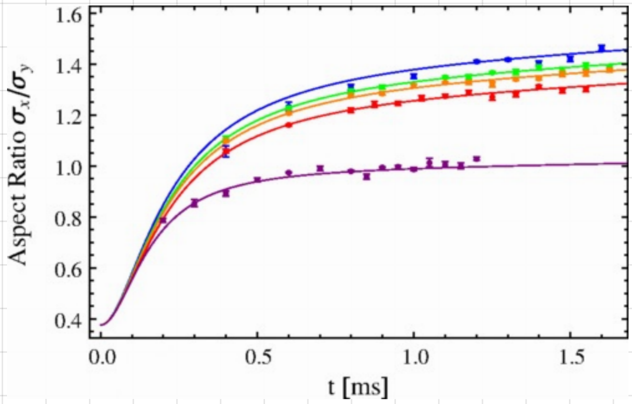
$\Rightarrow$ $\eta \neq 0$

$\zeta = 0$

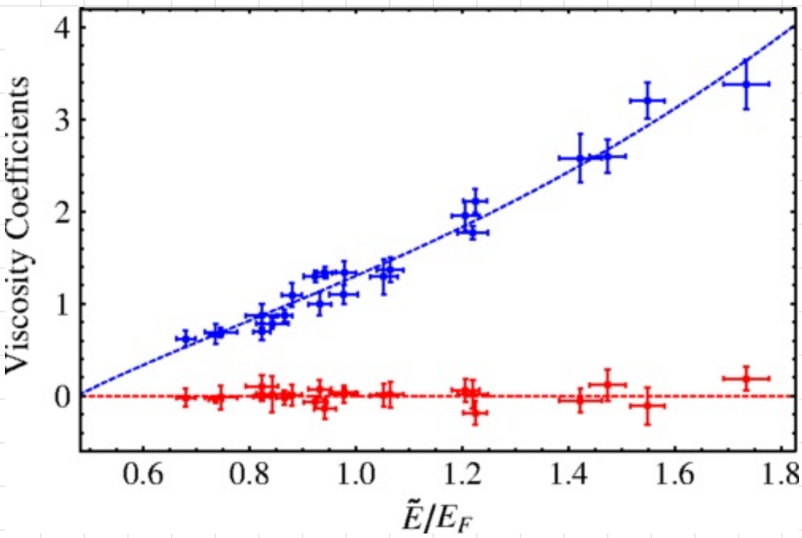
- 3次元ユニタリーフェルミ気体

(Elliott et al. PRL 112, 040405 (2014))





$\Rightarrow$



$\eta \neq 0$

$\zeta = 0$

☆ 量子異常による対称性の破れ

$V(\vec{r}) = -g\,\delta^{d=2}(\vec{r})$ は $\underbrace{\text{スケール不変な相互作用}}_{V(\lambda\vec{r}) = \lambda^{-2} V(\vec{r})}$

しかし、量子力学的効果によって破れる！ ⇐ 量子異常

作用

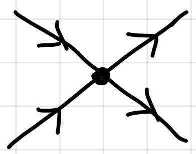
$$S_\Lambda = \int dt\, d\vec{r} \left[\underbrace{\psi^\dagger \left(i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m}\right)\psi}_{\text{propagator}} + \overbrace{\underbrace{\frac{g}{2}}_{\substack{\text{引力“δ関数”ポテンシャル} \\ V(\vec{r}) = -g\delta(\vec{r})}} \psi^\dagger\psi^\dagger\psi\psi}^{\text{vertex}} \right]$$

ファインマン則

- propagator

$$\xrightarrow[\quad p \quad]{} \qquad iG(p) = \frac{i}{p_0 - \frac{\vec{p}^2}{2m} + i0^+}$$

- vertex

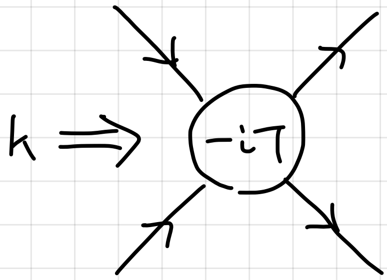


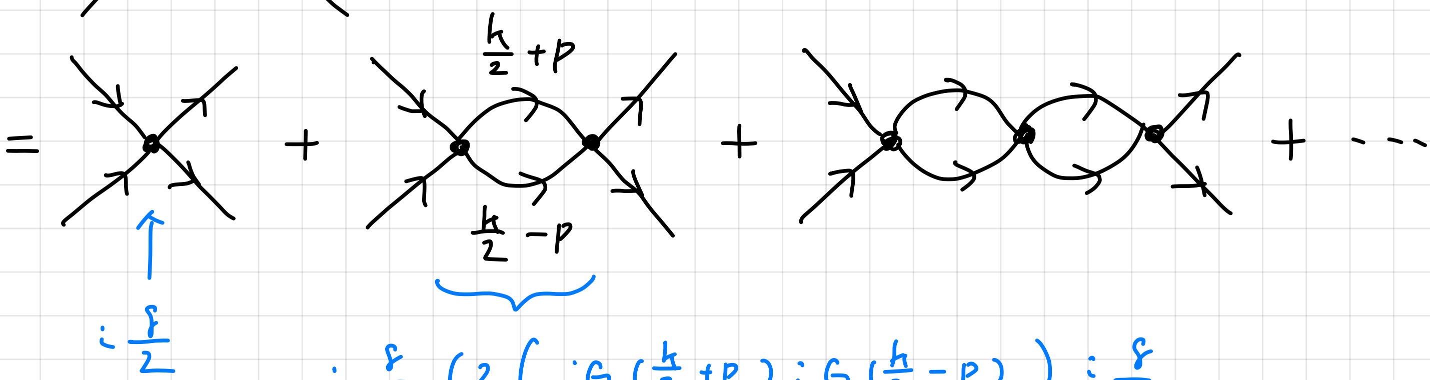
$: \; i\frac{g}{2}$ with 運動量カットオフ Λ

"Wilson 流繰り込み群"

$\underbrace{e^{-s}\Lambda}_{\Lambda'} < |\vec{p}| < \Lambda$ を積分して S_Λ の変化を見る.

2体散乱T行列





$$i\frac{g}{2}\left(2\int_p iG\left(\frac{k}{2}+p\right) iG\left(\frac{k}{2}-p\right)\right) i\frac{g}{2}$$

$$= \frac{g^2}{2}\int \frac{dp_0\, d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\frac{k_0}{2}+p_0-\frac{(\frac{\vec{k}}{2}+\vec{p})^2}{2m}+i0^+} \frac{1}{\frac{k_0}{2}-p_0-\frac{(\frac{\vec{k}}{2}-\vec{p})^2}{2m}+i0^+}$$

$$= -i\frac{g^2}{2}\int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^2} \frac{1}{k_0-\frac{\vec{k}^2}{4m}-\frac{\vec{p}^2}{m}+i0^+}$$

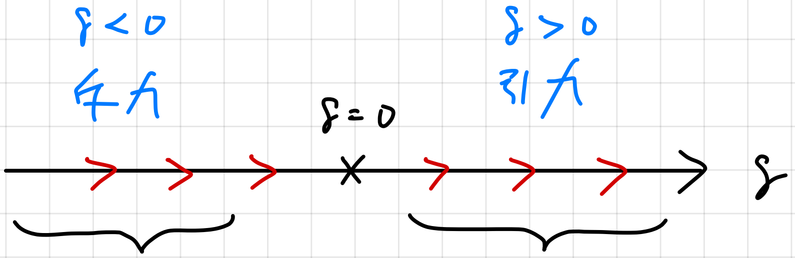
$$= -i\frac{g^2}{2}\underbrace{\int_{e^{-ds}\Lambda}^{\Lambda} \frac{dp\, p}{2\pi} \frac{1}{k_0-\frac{k^2}{4m}-\frac{p^2}{m}+i0^+}}_{-\frac{m}{2\pi}\ln\frac{\Lambda}{e^{-ds}\Lambda}}$$

$$= i\frac{mg^2}{4\pi}ds$$

$\therefore\quad g \to g + \underbrace{\frac{mg^2}{2\pi}ds}_{dg}$ と変化

⇒ "繰り込み群方程式" $\frac{dg}{ds} = \frac{m}{2\pi} g^2$

解は $g(s) = \dfrac{1}{\frac{1}{g_0} - \frac{m}{2\pi} s}$



s→大で必ず $g \to 0$

quantum triviality

$s \to$ 大で $g \to$ 大
$s \to$ 小で $g \to 0$

asymptotic freedom

⇒ 2次元には非自明な
斥力δ相互作用は存在しない

⇓

特に、g は $s = \frac{2\pi}{m g_0}$ で発散

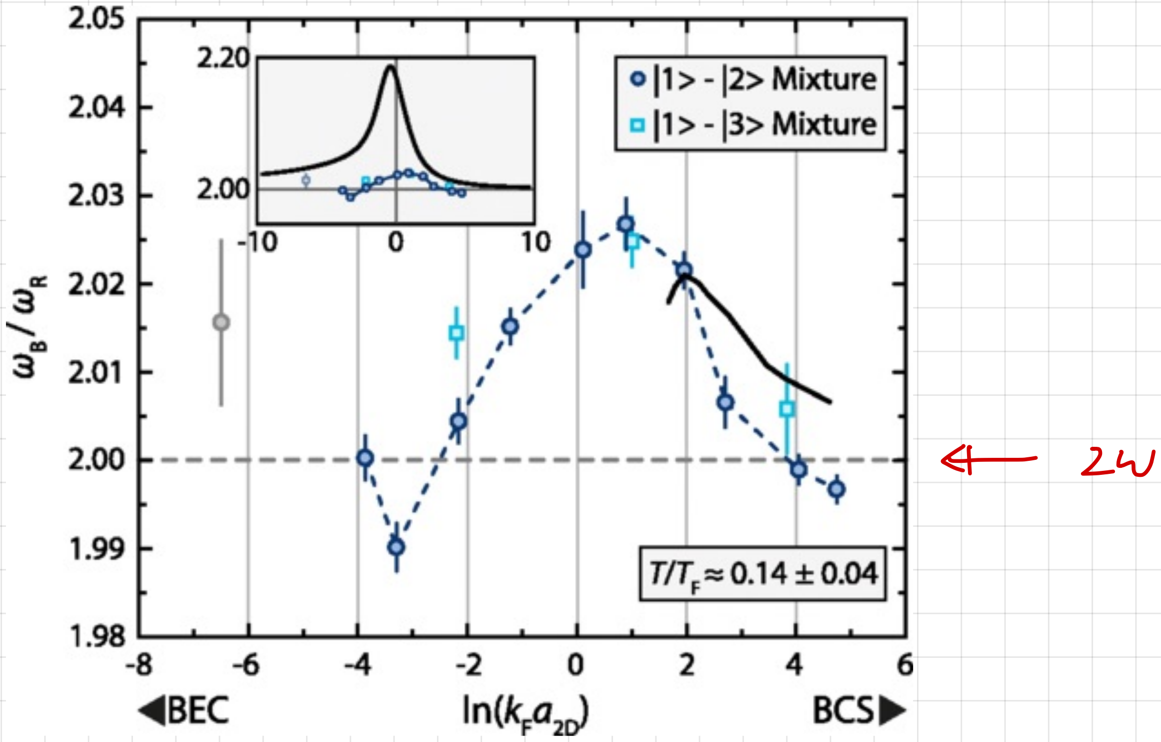
特徴的な運動量スケール

$\Lambda' = e^{-s}\Lambda = e^{-\frac{2\pi}{m g_0}}\Lambda$ が存在

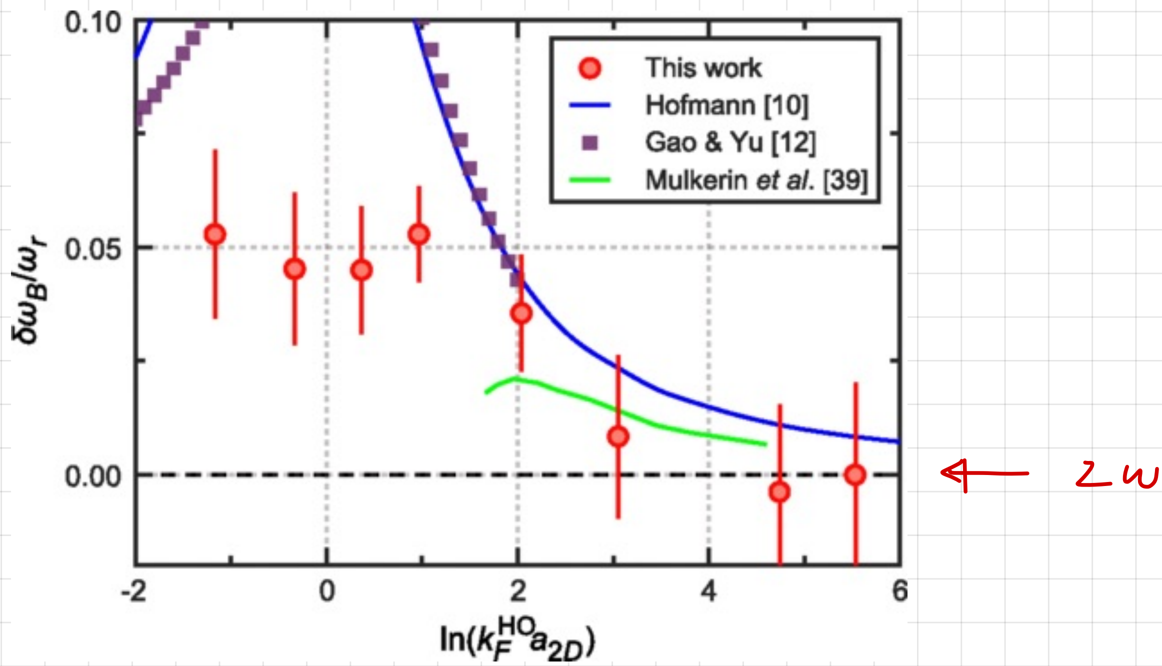
⇒ スケール不変性の破れ

($E \sim \frac{\Lambda'^2}{m}$ は束縛エネルギー
に対応)

Breathing mode の振動数 ≒ 2ω



(Holten et al. PRL 121, 120401 (2018))



(Peppler et al. PRL 121, 120402 (2018))