冷却原子 (cold atoms)

→ 系を自由にデザインしコントロールできる

利点

- 相互作用 (フェッシュバッハ共鳴)
- 空間次元 (光格子)
- 量子統計、成分数、質量比 (原子種)

→ 何ができるか？

└ 前半：多体系

BCS-BEC クロスオーバーとユニタリーフェルミ気体
(3D, フェルミ粒子2成分)

└ 後半：少数系

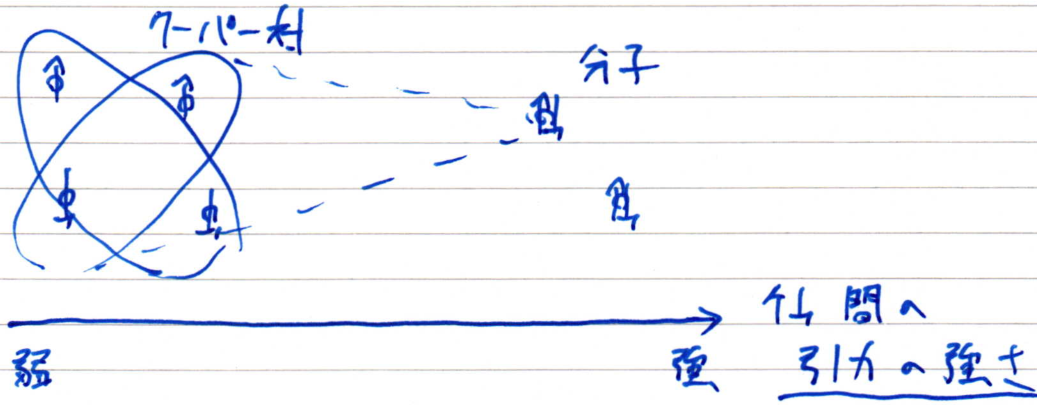
エフィモフ効果 (3D, ボース粒子)
スーパーエフィモフ効果 (2D, フェルミ粒子)

方法
- 場の理論
- 対称性
- 厳密解
- くりこみ群

以下、$\hbar = 1$　$k_B = 1$

ただし、$c = 1$ でない！

BCS-BEC クロスオーバー



引力の強さ ⟺ s波散乱長 a

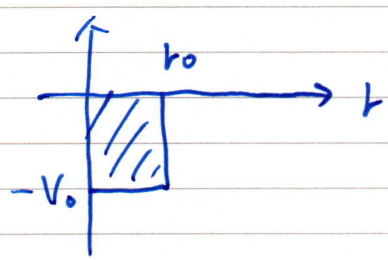
散乱振幅 $f_s(k) = \dfrac{-1}{ik - \underbrace{k\cot\delta}}$

$$k\cot\delta = -\underline{\underline{\frac{1}{a}}} + \frac{1}{2} r_{eff} k^2 + \cdots$$

$$\therefore\ \frac{1}{a} = -\lim_{k\to 0} k\cot\delta$$

井戸型ポテンシャル

$$V(r) = -V_0\ \theta(r_0 - r)$$



引力の強さ
$V_0 = \dfrac{u_0^2}{2\mu}$

ポテンシャルのレンジ（到達距離）

Schrödinger 方程式

$$\left[-\frac{\nabla^2}{2\mu}+V(r)\right]\psi = \underbrace{E}_{\frac{k^2}{2\mu}}\psi$$

$$\Longrightarrow \left[-\partial_r^2-\frac{2}{r}\partial_r+2\mu V(r)\right]\psi = k^2\psi$$

s 波

$$\Longrightarrow \left[-\partial_r^2+\underbrace{2\mu V(r)}_{-m_0^2\theta(r_0-r)}\right]\chi = k^2\chi$$

$\psi = \frac{\chi}{r}$

$$\therefore \quad \chi'' = \begin{cases} -(m_0^2+k^2)\,\chi & r<r_0 \\ -k^2\,\chi & r>r_0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} \chi(r) \propto \sin\sqrt{m_0^2+k^2}\,r \\ \chi(r) \propto \sin(kr+\delta) \end{cases}$$

phase shift

$$\left.\frac{\chi'}{\chi}\right|_{r=r_0^-} = \left.\frac{\chi'}{\chi}\right|_{r=r_0^+}$$

$$\Longrightarrow \sqrt{m_0^2+k^2}\cot\sqrt{m_0^2+k^2}\,r_0 = k\cot(kr_0+\delta)$$

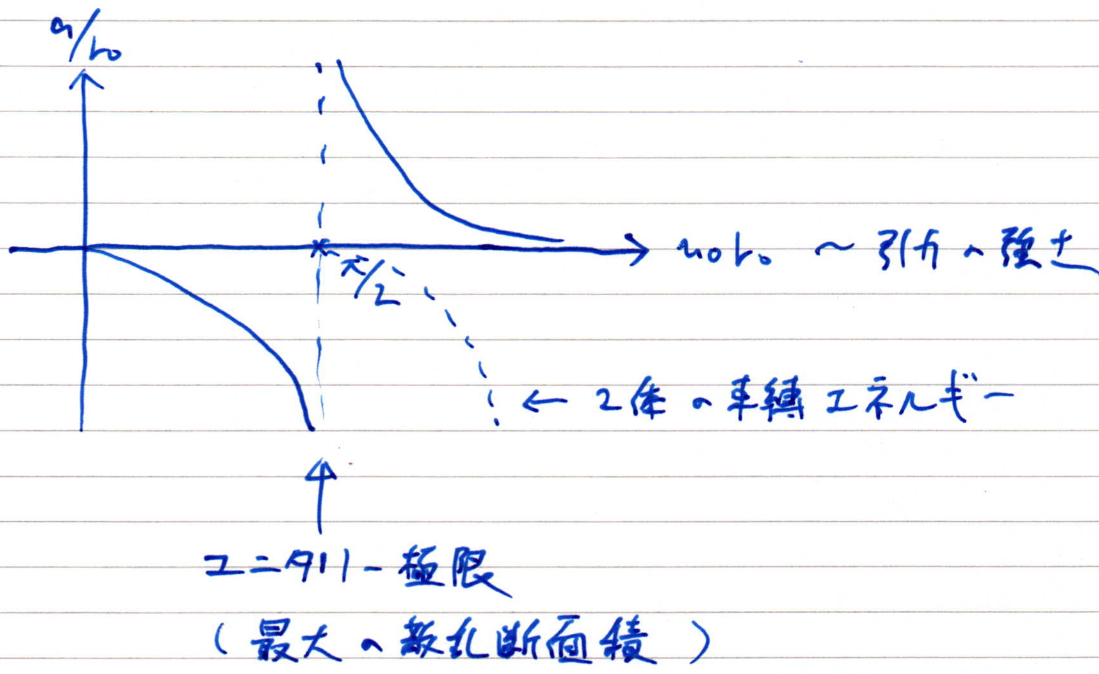
$$= k\,\frac{\cot kr_0\cot\delta-1}{\cot kr_0+\cot\delta}$$

cot δ について解くと

$k \cot \delta = \cdots\cdots$

$$\xrightarrow[k\to 0]{} \frac{\kappa_0 \cot \kappa_0 r_0}{1 - \kappa_0 r_0 \cot \kappa_0 r_0} \equiv -\frac{1}{a}$$

$$\therefore\ a = r_0 - \frac{1}{\kappa_0 \cot \kappa_0 r_0}$$

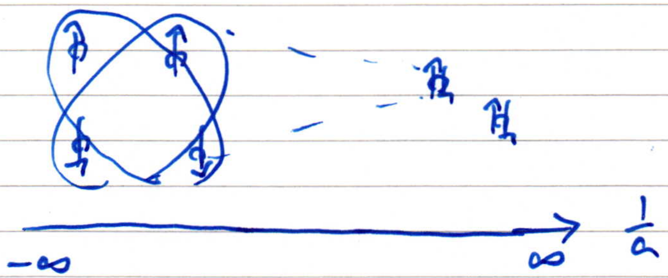


引力の強さ：弱 → 中 → 強、

a ：-0　$\pm\infty$　$+0$

$1/a$ ：$-\infty$　0　$+\infty$

BCS-BEC クロスオーバー



系に存在する長さスケール

・密度 n → 平均粒子間距離 $n^{-1/3}$ (~100Å)

・温度 T → 熱ド・ブロイ波長 $\lambda_T \sim 1/\sqrt{mT}$ ($\xrightarrow[T\to 0]{} \infty$)

・相互作用 → 散乱長 a (可変)

↘ ポテンシャル・レンジ r_0 (~10Å)

⇒ $r_0 \ll n^{-1/3}, \lambda_T, a$

↓ 無視できる.

0

$\boxed{\text{ゼロレンジ極限}}$

⇒ 物理の $T=0$ は $n^{-1/3}$, a だけに依存

⇒ ポテンシャルの情報消える.

⇒ 普遍性!!!

☆ ゼロレンジ極限の記述

1) 量子力学

2体 Schrödinger 方程式

$$\left[-\frac{\nabla^2}{2\mu} + V(r) \right] \psi = E \psi$$

$$\xrightarrow[r_0 \to 0]{} \quad -\frac{\nabla^2}{2\mu} \psi = E \psi \quad \text{for } r > 0$$

$$\psi \propto \frac{\sin(kr + \delta)}{r}$$

$$\xrightarrow[kr \to 0]{} \quad \frac{\sin\delta + kr\cos\delta}{r}$$

$$\propto \frac{1}{r} + k\cot\delta$$

$$= \underline{\frac{1}{r} - \frac{1}{a}} + \cancel{O(r)}$$

つまり. $\psi(r) \xrightarrow[r \to 0]{} \frac{1}{r} - \frac{1}{a} + O(r)$

Bethe - Peierls boundary condition.

特に. 自由極限 $(a \to -0)$ $\quad \psi \to \text{const.}$

ユニタリー極限 $(a \to \infty)$

$$\psi \to \frac{1}{r}$$

N体の場合も同様に

$$-\sum_{i=1}^{N}\frac{\nabla_i^2}{2m}\psi(r_1,r_2,\cdots,r_N) = E\,\psi(r_1,r_2,\cdots,r_N)$$

with B.C. $\displaystyle\lim_{|r_i-r_j|\to 0}\psi = \left(\frac{1}{|r_i-r_j|}-\frac{1}{a}\right)\underbrace{\chi(r_1,\cdots,r_N)}_{r_i,r_j\text{ は除く}}$

あるいは フェルミの擬ポテンシャル

$$V(r) = \frac{2\pi a}{\mu}\delta(\vec{r})\frac{\partial}{\partial r}r$$

を用いて、

$$\left[-\frac{\nabla^2}{2\mu}+V(r)\right]\psi = E\psi \quad \text{for} \quad r \geq 0$$

とすれば、

境界条件 $\psi|_{r\to 0} \propto \frac{1}{r}-\frac{1}{a}$ が

自動的に選ばれる。

(確認) $\displaystyle\left[-\frac{\nabla^2}{2\mu}+V(r)\right]\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{a}\right)$

$$= \frac{1}{2\mu}4\pi\delta(\vec{r}) + \frac{2\pi a}{\mu}\delta(\vec{r})\left(-\frac{1}{a}\right)$$

$$= 0 \quad //$$

2) 場の理論

with カットオフ Λ

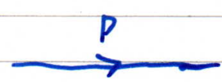
$$\mathcal{L} = \psi_\sigma^\dagger \left(i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m}\right)\psi_\sigma + g\, \psi_\uparrow^\dagger \psi_\downarrow^\dagger \psi_\downarrow \psi_\uparrow$$

"δ関数" ポテンシャル

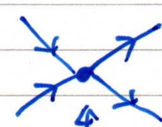
$$V(r) = -g\,\delta(\vec{r}_\uparrow - \vec{r}_\downarrow)$$

ファインマン・ルール

$\underbrace{\hspace{4em}}_{\text{propagator}}$ $\underbrace{\hspace{4em}}_{\text{vertex}}$



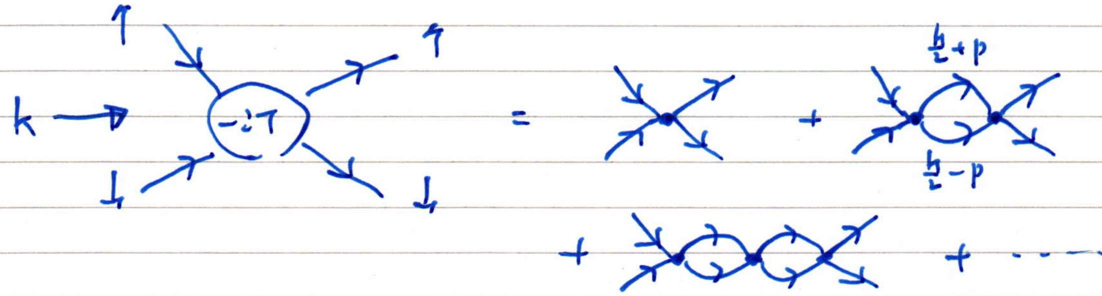
$$iG(p) = \frac{i}{p_0 - \varepsilon_p + i0^+}$$



ig

未知パラメータ Λ, g の決定

$\Longleftrightarrow$ 散乱T行列 $\longleftrightarrow \propto \dfrac{1}{ik - \frac{1}{a}}$



$$-iT(k) = if + if\left(\int_p iG\,iG\right)if$$

$$+\ if\left(\int_p iG\,iG\right)if\left(\int_p iG\,iG\right)if + \cdots$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\displaystyle\int\frac{dp_0\,d\vec{p}}{(2\pi)^4}\,iG\left(\tfrac{k}{2}+p\right)iG\left(\tfrac{k}{2}-p\right)}$$

$$= \frac{if}{1 - if\left(\int_p iG\,iG\right)}$$

$$= \frac{-i}{\dfrac{1}{f} + i\displaystyle\int\frac{dp_0\,d\vec{p}}{(2\pi)^4}\dfrac{1}{\frac{k_0}{2}+p_0-\frac{(\frac{k}{2}+p)^2}{2m}+i0^+}\,\dfrac{1}{\frac{k_0}{2}-p_0-\frac{(\frac{k}{2}-p)^2}{2m}+i0^+}}$$

$$= \frac{-i}{\dfrac{1}{f} + \underbrace{\displaystyle\int\frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3}}_{\frac{4\pi}{(2\pi)^3}\int_0^{\Lambda}dp\cdot p^2}\dfrac{1}{\underbrace{k_0-\frac{k^2}{4m}+i0^+}_{\text{重心運動}}\underbrace{-\frac{p^2}{m}}_{\text{相対運動}}}}$$

Λ: カットオフ.

$k_0 = \frac{k^2}{m}$, $\vec{k} = 0$ とおいて積分すると

$$T(k) = \frac{-1}{\frac{1}{g} - \frac{m\Delta}{2\pi^2} - \frac{m}{4\pi} ik + \frac{k^2}{\Delta} + \frac{k^4}{\Delta^3} + \cdots}$$

$$= \frac{4\pi}{m} \frac{1}{ik + \frac{4\pi}{m}\left(\frac{m\Delta}{2\pi^2} - \frac{1}{g}\right) + \frac{k^2}{\Delta} + \frac{k^4}{\Delta^3} + \cdots}$$

$$\propto f(k) = \frac{-1}{ik + \frac{1}{a}}$$ とするためには

$$\frac{1}{g} - \frac{m\Delta}{2\pi^2} = -\frac{m}{4\pi a}$$ を固定しながら

$\Delta \to \infty$ ($\therefore g \to 0$) の極限をとる.

$\Leftrightarrow$ ゼロレンジ極限

BCS-BEC クロスオーバー（平均場）

$r_0 \to 0$, $T \to 0$ のとき.

系に存在する長さスケール

- 密度 n → 平均粒子間距離 $n^{-1/3}$
- 相互作用 → 散乱長 a

⇒ 熱力学量を計算したい.

$$\mathcal{L} = \psi^\dagger_\sigma \left(i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu\right) \psi_\sigma + g\, \psi^\dagger_\uparrow \psi^\dagger_\downarrow \psi_\downarrow \psi_\uparrow$$

↓ Hubbard-Stratonovich 変換

$$\mathcal{L}' = \psi^\dagger_\sigma \left(i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu\right) \psi_\sigma \underbrace{- \frac{\phi^\dagger \phi}{g} + \phi^\dagger \psi_\downarrow \psi_\uparrow + \psi^\dagger_\uparrow \psi^\dagger_\downarrow \phi}_{-\frac{(\phi^\dagger - \psi^\dagger_\uparrow \psi^\dagger_\downarrow)(\phi - \psi_\downarrow \psi_\uparrow)}{g} + g\, \psi^\dagger_\uparrow \psi^\dagger_\downarrow \psi_\downarrow \psi_\uparrow}$$

$$Z = \int \underbrace{\mathcal{D}[\psi^\dagger, \psi]\, \mathcal{D}[\phi^\dagger, \phi]}_{\text{ガウス積分を実行}}\, e^{i\int dt\, d\vec{x}\, \mathcal{L}'}$$

$$= \int \mathcal{D}[\psi^\dagger, \psi]\, e^{i\int dt\, d\vec{x}\, \mathcal{L}}$$

→ 元の作用に戻る.

平均場近似 $\phi(x) = \phi_0$ (const.)

$\uparrow$ gap 方程式

Ω (grand potential density) を最小化

$$\mathcal{L}'\Big|_{\text{平均場}} = \psi_\sigma^\dagger \left(i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu\right)\psi_\sigma - \frac{\phi_0^2}{g} + \psi_\uparrow^\dagger \psi_\downarrow^\dagger \phi_0 + \phi_0 \psi_\downarrow \psi_\uparrow$$

$$= \underbrace{\left(\psi_\uparrow^\dagger \ \psi_\downarrow\right)}_{\Psi^\dagger} \underbrace{\begin{pmatrix} i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu & \phi_0 \\ \phi_0 & +i\partial_t - \frac{\nabla^2}{2m} - \mu \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Nambu-Gorkov} \\ \text{propagator } G_0^{-1}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow^\dagger \end{pmatrix}}_{\Psi} - \frac{\phi_0^2}{g}$$

$$Z = e^{-iV\Omega} = \int \mathcal{D}[\Psi^\dagger, \Psi]\, e^{i\int_{\text{時空}} \mathcal{L}'|_{\text{平均場}}}$$

$$= \mathrm{Det}\, G_0^{-1}\, e^{-iV\frac{\phi_0^2}{g}}$$

$$\therefore \ \Omega = \frac{\phi_0^2}{g} + \frac{i}{V} \underbrace{\mathrm{Log}\ \mathrm{Det}}_{\mathrm{Tr\ Log}}\, G_0^{-1}$$

$$= \frac{\phi_0^2}{g} + i\int \frac{dp_0\, d\vec{p}}{(2\pi)^4}\, \mathrm{tr}\log \begin{pmatrix} p_0 - \varepsilon_p + \mu & \phi_0 \\ \phi_0 & p_0 + \varepsilon_p - \mu \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\phi_0^2}{g} - \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \left[E_p - (\epsilon_p - \mu) \right] \Bigg|_{E_p = \sqrt{(\epsilon_p - \mu)^2 + \phi_0^2}}$$

・gap 方程式 $\frac{\partial \Omega}{\partial \phi_0} = 0$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{g} = \int^{\Lambda} \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \qquad \left(E_p \xrightarrow[p \to \infty]{} \epsilon_p \right)$$

$$= \int^{\Lambda} \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\epsilon_p} + \int^{\Lambda} \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{2E_p} - \frac{1}{2\epsilon_p} \right)$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\frac{1}{g} - \int^{\Lambda} \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{m}{p^2}}_{-\frac{m}{4\pi a}} = \underbrace{\int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{2E_p} - \frac{1}{2\epsilon_p} \right)}_{\text{収束}:\ \Lambda \to \infty}$$

・粒子数固定 $\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = -n$

$$\Longleftrightarrow n = \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \left(- \frac{2(\epsilon_p - \mu)}{2E_p} + 1 \right)$$

$$= \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \left(1 - \frac{\epsilon_p - \mu}{E_p} \right)$$

gap方程式 + 粒子数一定

$$\begin{cases} \dfrac{m}{4\pi a} = \displaystyle\int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{2\varepsilon_p} - \frac{1}{2E_p} \right) \\ n = \displaystyle\int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left(1 - \frac{\varepsilon_p - \mu}{E_p} \right) = \dfrac{k_F^3}{3\pi^2} \end{cases}$$

⇒ a と k_F が与えられたとき、μ と ϕ_0 が決定

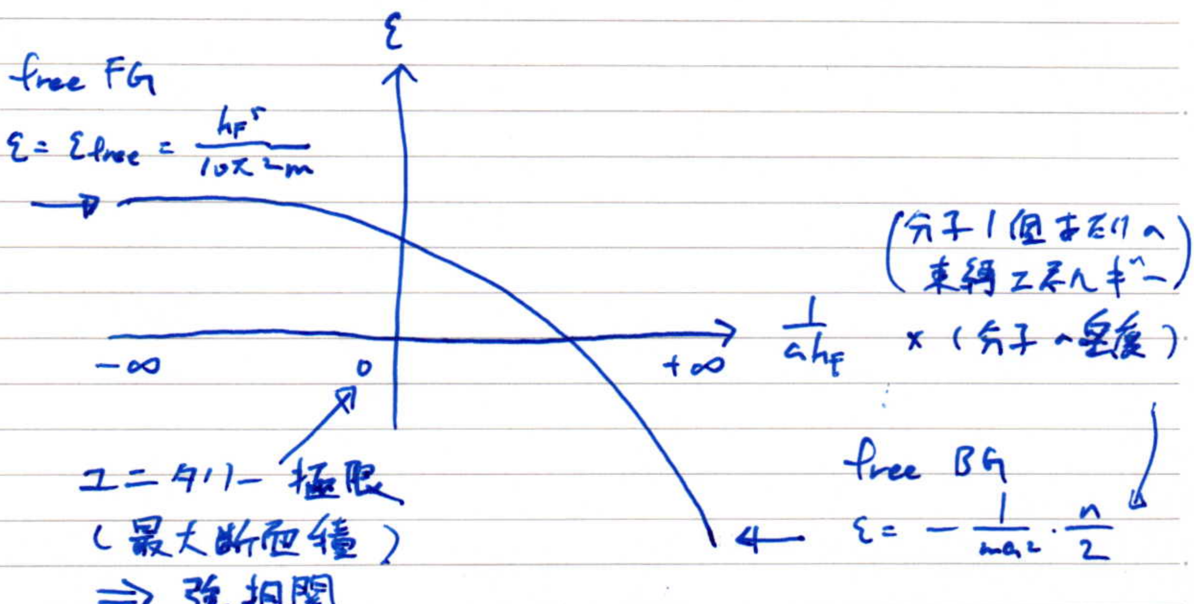
⇒ Ω が決定

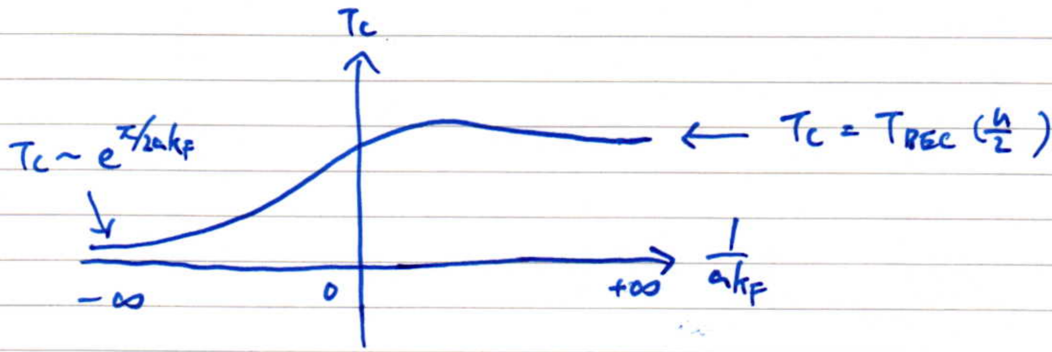
⇒ 圧力 $p = -\Omega$

エネルギー密度 $\varepsilon = \Omega + \mu n$

化学ポテンシャル $\mu = \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial n}$

音速 $c_s^2 = \dfrac{1}{m} \dfrac{\partial p}{\partial n}$





平均場＋ガウス揺らぎ

エネルギー密度

$$\varepsilon = \xi\left(\frac{1}{ak_F}\right) \underbrace{\varepsilon_{free}}_{= \frac{k_F^5}{10\pi^2 m}}$$

↓

引力によるエネルギー利得

特に、$a \to \infty$ のとき、$\xi\left(\frac{1}{ak_F} \to 0\right) = \xi_0$ は定数なので

$$\mu = \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = \xi_0 \cdot \underbrace{\varepsilon_F}_{= \frac{k_F^2}{2m}}$$

$$P = \mu n - \varepsilon = \xi_0 \cdot P_{free} \;/\; = \frac{k_F^5}{15\pi^2 m}$$

$$c_s^2 = \xi_0 \cdot c_{s,free}^2 \;/\; \frac{v_F^2}{3}$$

ユニタリー極限における基本的熱力学量 ξ_0

を決定したい!

- 平均場近似 $\xi_0 = 0.59$
- モンテ・カルロ・計算 $\xi_0 = 0.372(5)$ [1]

  $\xi_0 = 0.366^{+0.016}_{-0.011}$ [2]

- 実験 $\xi_0 = 0.370(5)(8)$ [3, 4]

[1] 〃 1107.5848

[2] arXiv: 1203.3169

[3] 〃 1110.3309

[4] 〃 1211.1512