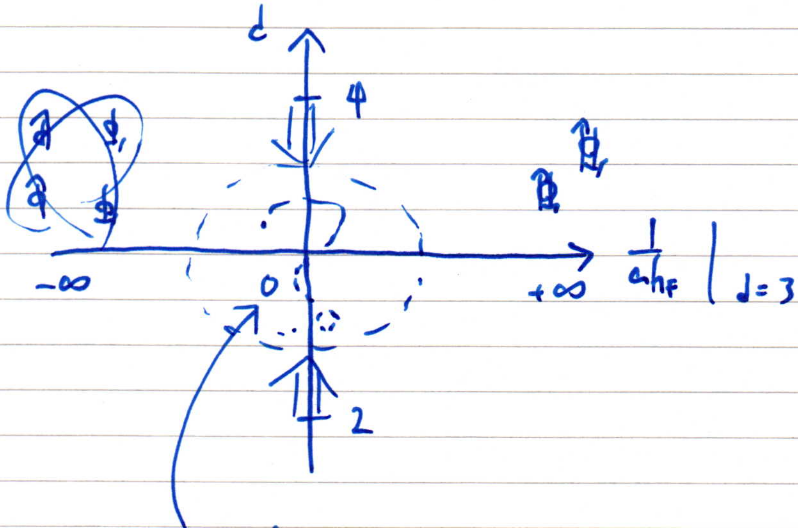
BCS−BEC クロスオーバー



フェルミ気体の ユニタリー極限
= ユニタリー・フェルミ気体

- 散乱断面積最大
  ⇒ (最)強相関量子多体系
- 密度以外にスケールがない
  ⇒ 高い対称性

d=4 と d=2 の特殊性 (Nussinov, Nussinov)

1) Bethe-Peierls boundary condition による理解

2体問題 $\underbrace{-\frac{\nabla^2}{2\mu}}\psi = E\psi$ with $\psi|_{r\to 0} \to \frac{1}{r} - \frac{1}{a} + O(r)$, $\frac{1}{a}\to 0$

$$\nabla^2|_{l=0} = \partial_r^2 + \frac{2}{r}\partial_r$$

$\xrightarrow[\text{一般の次元 } d]{}$ $\nabla^2|_{l=0} = \partial_r^2 + \frac{d-1}{r}\partial_r$

$$\Rightarrow \psi|_{r\to 0} \to \frac{1}{r^{d-2}} - \frac{1}{a} + O(r^{4-d}), \quad \frac{1}{a}\to 0$$

$\boxed{d\to 4}$

波動関数 $\psi(r)$ の規格化積分

$$\int_0 d\vec{r}\, |\psi(r)|^2 \sim \int_0 dr \cdot r^{d-1} \left(\frac{1}{r^{d-2}}\right)^2$$

$$\sim \underbrace{\int_0 dr \frac{1}{r^{d-3}}}_{d\geq 4 \text{ のとき } r=0 \text{ で発散}}.$$

⇒ $d\to 4$ のとき、↑ と ↓ は局在 [illegible]

⇒ ユニタリー・フェルミ気体は自由ボース気体に帰着

∴ $\xi|_{d\to 4} \to 0$!

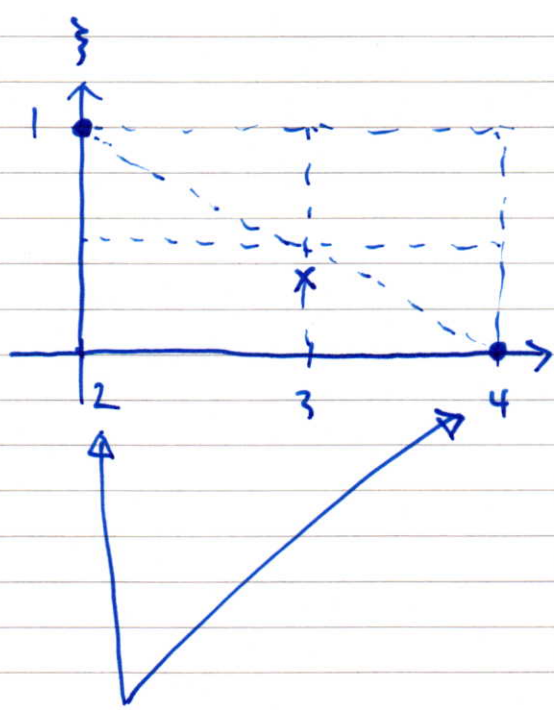
$\boxed{d \to 2}$

波動関数 $\psi(r)\big|_{r\to 0} \to \frac{1}{r^{d-2}} \xrightarrow[d\to 2]{} \underbrace{\text{const.}}_{}$

$r=0$ での特異性なし

⇒ 相互作用なし

⇒ $d\to 2$ のとき、ユニタリーフェルミ気体は
自由フェルミ気体に帰着　　∴ $\xi\big|_{d\to 2} \to 1$!



$d\big|_{a_{hF}=\infty}$

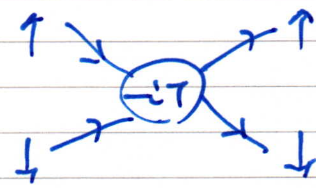
MC計算 }
実験 } $\xi\big|_{d=3} \simeq 0.37$

平均場　$\xi_{MF} = 0.59$

自明な極限のまわりで
ξ を系統的に展開できる！　⇒ イプシロン展開

2) 場の理論による理解

一般の次元 d における
2体散乱



$$-iT(k) = \frac{i}{\frac{1}{g} + \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{1}{k_0 - \frac{k^2}{4m} + i0^+ - \frac{p^2}{m}}}$$

$$= \frac{i}{\underbrace{\frac{1}{g} - \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{m}{p^2}}_{-\frac{m}{4\pi a} \to 0} + \underbrace{\int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{k_0 - \frac{k^2}{4m} + i0^+}{\frac{p^2}{m}\left(k_0 - \frac{k^2}{4m} + i0^+ - \frac{p^2}{m}\right)}}_{2<d<4 \text{ で収束}}}$$

$$\frac{S_d}{(2\pi)^d} \int_0^\infty dp \cdot p^{d-1}$$

$$S_d = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} = \begin{cases} 2 & d=1 \\ 2\pi & d=2 \\ 4\pi & d=3 \\ 2\pi^2 & d=4 \\ \vdots & \end{cases}$$

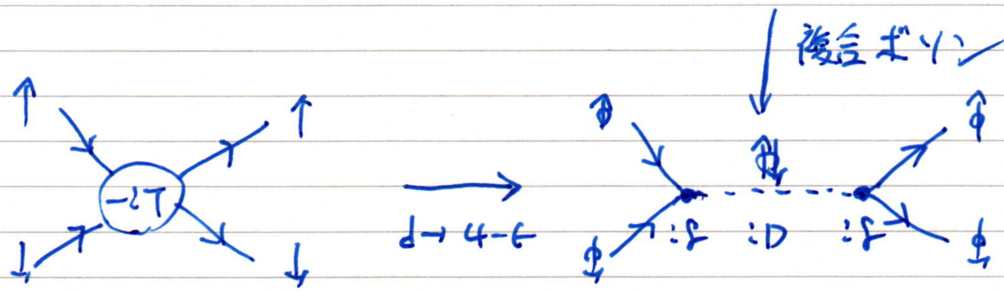
$$-iT(k)\Big|_{d=4-\epsilon} = \frac{i}{\frac{S_d}{(2\pi)^d}\int_0^\infty dp\cdot p^{d-1}\,\frac{k_0-\frac{k^2}{4m}+i0^+}{\frac{p^2}{m}\left(\cancel{k_0-\frac{k^2}{4m}+i0^+}-\frac{p^2}{m}\right)}}$$

$p\sim\infty$

$$\xrightarrow[\epsilon\ll 1]{} \frac{i}{-\frac{m^2}{8\pi^2}\,\frac{k_0-\frac{k^2}{4m}+i0^+}{\epsilon}}$$

$$= \underbrace{-\frac{8\pi^2\epsilon}{m^2}}_{(ig)^2}\;\underbrace{\frac{i}{k_0-\frac{k^2}{4m}+i0^+}}_{iD(k)}$$

結合定数　　プロパゲータ



$g^2\sim\epsilon\ll 1$ による

系統的な展開が可能！

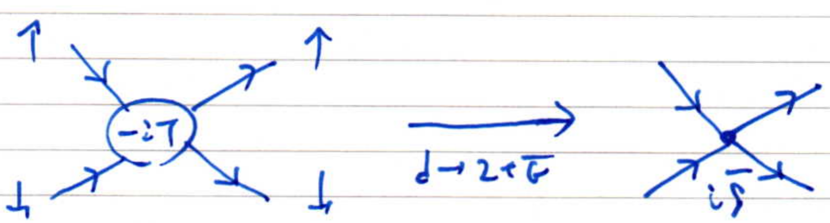
$$-iT(k)\Big|_{d=2+\bar{\epsilon}} = \frac{i}{\dfrac{S_d}{(2\pi)^d}\displaystyle\int_0^\infty dp\cdot p^{d-1}\,\frac{k_0^2-\frac{k^2}{2m}+i0^+}{\frac{p^2}{m}\left(k_0-\frac{k^2}{4m}+i0^+\cancel{-\frac{p^2}{m}}\right)}}$$

$p\sim 0$

$$\xrightarrow[\bar{\epsilon}\ll 1]{} \frac{i}{\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{m}{\bar{\epsilon}}}$$

$$= i\,\frac{2\pi\bar{\epsilon}}{m} \equiv i\bar{g}$$

結合定数



$\bar{g}\sim\bar{\epsilon}\ll 1$ による

系統的な展開が可能！

$\epsilon = 4 - d \ll 1$ による展開法

$$\mathcal{L} = \psi^\dagger_\sigma \left(i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu \right) \psi_\sigma - \underbrace{\frac{\phi^\dagger \phi}{g}} + \phi^\dagger \psi_\downarrow \psi_\uparrow + \psi^\dagger_\uparrow \psi^\dagger_\downarrow \phi$$

$$\frac{1}{g} - \underbrace{\int^{\Lambda} \frac{d^d p}{(2\pi)^d} \frac{m}{p^2}} = 0 \iff a = \infty$$

発散 $\sim \Lambda^{d-2} = 0$ とする約束の元で

$\iff$ 次元正則化の元で $\frac{1}{g} = 0$

$$\phi(x) = \underbrace{\phi_0}_{\text{真空期待値}} + g\,\varphi(x)$$

$$= \psi^\dagger_\sigma \left(i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu \right) \psi_\sigma + \phi_0 \psi_\downarrow \psi_\uparrow + \psi^\dagger_\uparrow \psi^\dagger_\downarrow \phi_0$$

$$+ g\,\varphi^\dagger \psi_\downarrow \psi_\uparrow + g\,\psi^\dagger_\uparrow \psi^\dagger_\downarrow \varphi$$

$$= \Psi^\dagger \begin{pmatrix} i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu & \phi_0 \\ \phi_0 & i\partial_t - \frac{\nabla^2}{2m} - \mu \end{pmatrix} \Psi + \varphi^\dagger \left(i\partial_t + \frac{\nabla^2}{4m} \right) \varphi$$

非摂動項

$$+ g\,\varphi^\dagger \Psi^\dagger \sigma_- \Psi + g\,\Psi^\dagger \sigma_+ \Psi$$

摂動項

$$- \varphi^\dagger \left(i\partial_t + \frac{\nabla^2}{4m} \right) \varphi$$

カウンター項

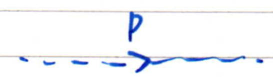
ファインマン・ルール

・非摂動項

フェルミ粒子のプロパゲータ

$$iG(p) = i\begin{pmatrix} p_0-\frac{\mathbf{p}^2}{2m}+\mu & \phi_0 \\ \phi_0 & p_0+\frac{\mathbf{p}^2}{2m}-\mu \end{pmatrix}^{-1}$$

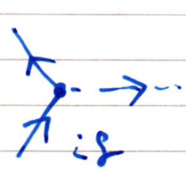
ボース粒子のプロパゲータ

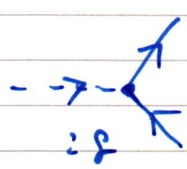


$$iD(p) = \frac{i}{p_0-\frac{p^2}{4m}+i0^+}$$

・摂動項

フェルミ・ボース結合





$$g = \left(\frac{8\pi^2\epsilon}{m^2}\right)^{1/2}$$

・カウンター項

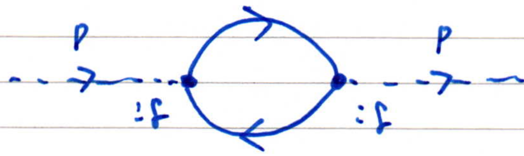
$$-i\left(p_0-\frac{\mathbf{p}^2}{4m}\right)$$

power counting rule

$g \sim \epsilon^{1/2}$ なので、

ある diagram $\sim \epsilon^{(\# \text{ of } g)/2}$

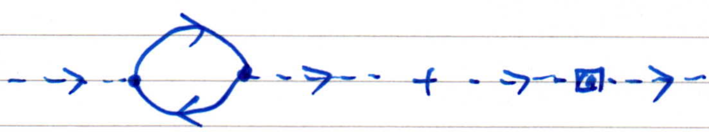
ただし、



$$-i\frac{m^2}{8\pi^2\epsilon}\left(p_0-\frac{p^2}{4m}\right)$$

$$i \underbrace{g^2\frac{m^2}{8\pi^2\epsilon}}_{1}\left(p_0-\frac{p^2}{4m}\right) = i\left(p_0-\frac{p^2}{4m}\right)$$

なので、



$$\sim O(\epsilon)$$

ϵ の lowest order での計算

$\epsilon \to 0$ のとき、$g \to 0$ するので、

$$\mathcal{L} \to \Psi^\dagger \begin{pmatrix} i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu & \phi_0 \\ \phi_0 & i\partial_t - \frac{\nabla^2}{2m} - \mu \end{pmatrix} \Psi$$

つまり $d \to 4$ では平均場近似が exact になる。

$$\Rightarrow \Omega = \frac{\phi_0^2}{g} - \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^d} \left[E_p - (\varepsilon_p - \mu) \right] \Big|_{E_p = \sqrt{(\varepsilon_p - \mu)^2 + \phi_0^2}}$$

後で $\frac{\mu}{\phi_0} \sim O(\epsilon) \ll 1$ と分かるので、

μ で展開すると、

$$\simeq \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^d} \frac{\phi_0^2}{2\varepsilon_p} - \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^d} \left(\sqrt{\varepsilon_p^2 + \phi_0^2} - \frac{\varepsilon_p}{\sqrt{\varepsilon_p^2 + \phi_0^2}} \mu - \varepsilon_p + \mu \right)$$

$$\xrightarrow[d \to 4-\epsilon]{} \frac{\phi_0}{3} \left(\frac{m\phi_0}{2\pi} \right)^2 - \frac{\mu}{\epsilon} \left(\frac{m\phi_0}{2\pi} \right)^2$$

・gap 方程式

$$\frac{\partial \Omega}{\partial \phi_0} = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = \phi_0 - \frac{2\mu}{\epsilon}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mu}{\phi_0} = \frac{\epsilon}{2} \sim O(\epsilon) \ll 1$$

・密度 $n = -\dfrac{\partial \Omega}{\partial \mu} = \dfrac{1}{\epsilon}\left(\dfrac{m\phi_0}{2\pi}\right)^2$

$$\parallel$$

$$2\int_0^{k_F} d^4k = \frac{k_F^4}{16\pi^2}$$

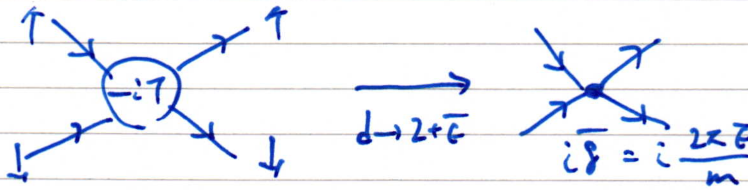
$$\Rightarrow \quad \epsilon_F = \frac{k_F^2}{2m} = \frac{\phi_0}{\epsilon^{1/2}}$$

よって $\xi \big|_{d\to 4-\epsilon} = \dfrac{\mu}{\epsilon_F}$

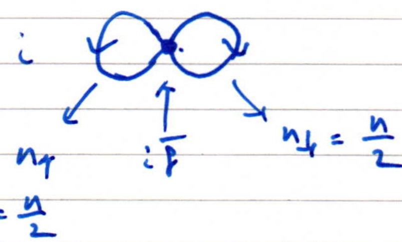
$$= 0 + \frac{1}{2}\epsilon^{3/2} + \cdots\cdots$$

$\sim O(\epsilon^{5/2})$

$\bar{\varepsilon}$ の lowest order での計算



$\bar{g}$ のて.

$\varepsilon\big|_{d\to 2+\bar{\epsilon}} = \varepsilon_{free} + i$ 

$$= \varepsilon_{free} - \frac{2\pi\bar{\epsilon}}{m}\left(\frac{n}{2}\right)^2$$

$$\left(\int_0^{k_F} d^2k\right)^2 = \left(\frac{k_F^2}{4\pi}\right)^2$$

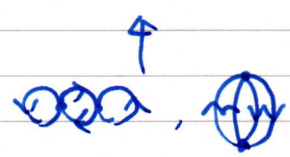
$$= \varepsilon_{free}\left[1 - \frac{2\pi\bar{\epsilon}}{m}\frac{\left(\frac{n}{2}\right)^2}{\varepsilon_{free}}\right]$$

$$2\int_0^{k_F}\frac{k^2}{2m}d^2k = \frac{k_F^4}{8\pi m}$$

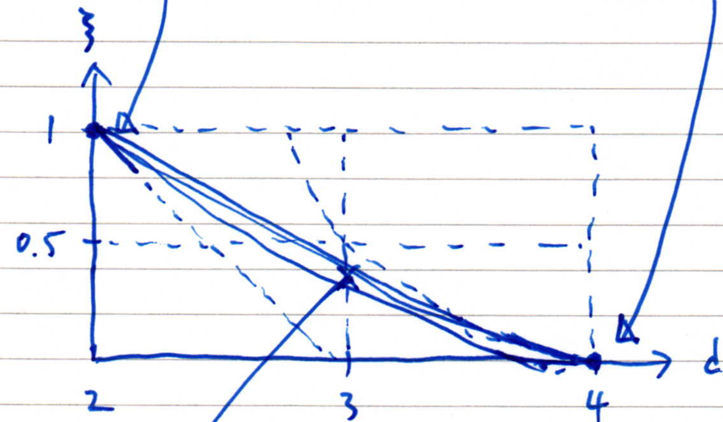
$$= \varepsilon_{free}\left[1 - \bar{\epsilon}\right]$$

よって、$\xi\big|_{d\to 2+\bar{\epsilon}} = \dfrac{\varepsilon_{unitary}}{\varepsilon_{free}}$

$$= 1 - \bar{\epsilon} + \cdots\cdots$$

 $\sim O(\bar{\epsilon}^2)$

$\xi = 1 - \bar{\epsilon} + O(\bar{\epsilon}^2)$ $\qquad$ $\xi = 0 + \frac{1}{2}\epsilon^{3/2} + O(\epsilon^{5/2})$



LO + NLO
with Borel-Padé

$\xi|_{d=3} \simeq 0.36 \sim 0.39$!!!

$\Longleftrightarrow$ $\xi \simeq 0.37$ from $\left\{ \begin{array}{l} \text{MC計算} \\ \text{実験} \end{array} \right.$