"operator-state correspondence"

$$H_{free} = \int d\vec{x}\, \psi_\sigma^\dagger \left(-\frac{\nabla^2}{2m}\right) \psi_\sigma$$

✓ 自由場の理論の演算子

例 1) $\mathcal{O} = \psi_\uparrow$

次元 $\Delta_{\mathcal{O}} = \frac{d}{2}$

粒子数 $N_{\mathcal{O}} = 1$

c.f. $[p] = 1$, $[E] = [\frac{p^2}{2m}] = 2$

$[\nabla] = [p] = 1$

$[x] = [\hbar/p] = -1$

$[t] = [\hbar/E] = -2$

2) $\mathcal{O} = \psi_\uparrow \psi_\downarrow$

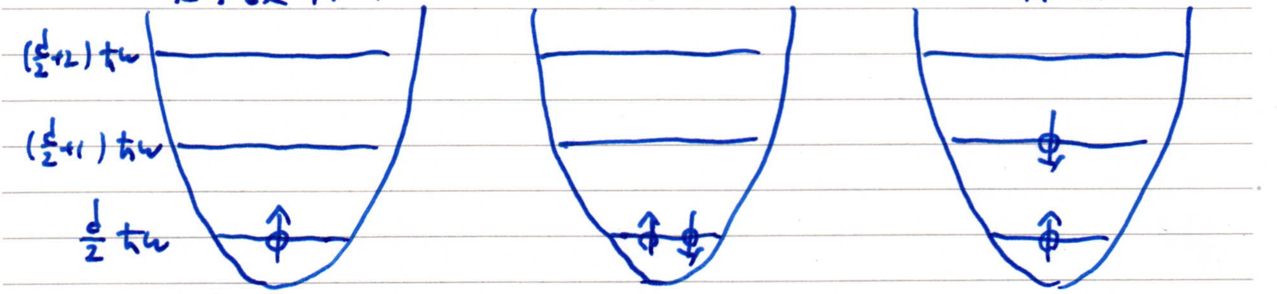
$\Delta_{\mathcal{O}} = \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = d$, $N_{\mathcal{O}} = 2$

3) $\mathcal{O} = \psi_\uparrow \nabla \psi_\downarrow$

$\Delta_{\mathcal{O}} = d + 1$, $N_{\mathcal{O}} = 2$

✓ 調和振動子中のエネルギー固有状態

粒子数 $N=1$ $N=2$ $N=2$



$E = \frac{d}{2}\hbar\omega$

$E = \frac{d}{2}\hbar\omega + \frac{d}{2}\hbar\omega = d\,\hbar\omega$

$E = \frac{d}{2}\hbar\omega + (\frac{d}{2}+1)\hbar\omega = (d+1)\hbar\omega$

$\Rightarrow$ "operator-state correspondence"

$$\left\{\begin{array}{l} \text{場の理論の演算子の次元 } \Delta_O \\ \quad\Updownarrow \qquad E = \Delta_O \hbar\omega \\ \text{調和振動子中のエネルギー固有値 } E \end{array}\right.$$

$\uparrow$ スケール対称性の帰結!

系の持つ(連続的)対称性

✓ 内部対称性 $(\psi \to e^{i\theta}\psi)$

$\Longleftrightarrow$ 粒子数 $N = \int d\vec{x}\, n$

- mass density $n = m \psi^\dagger_a \psi_a$
- current $\vec{j} = -\frac{i}{2} \psi^\dagger_a \overleftrightarrow{\nabla} \psi_a$

✓ 並進対称性

$$\left\{\begin{array}{l} \text{時間 } (t \to t + t_0) \Longleftrightarrow \text{ハミルトニアン } H \\ \text{空間 } (\vec{x} \to \vec{x} + \vec{x}_0) \Longleftrightarrow \text{運動量 } \vec{P} = \int d\vec{x}\, \vec{j} \end{array}\right.$$

✓ 回転対称性 $(\vec{x}_i \to R_{ij} \vec{x}_j)$

$\Longleftrightarrow \vec{L} = \int d\vec{x}\, \vec{x} \times \vec{j}$

✓ ガリレイ対称性 $(\vec{x} \to \vec{x} + \vec{v}t)$

$$\Longleftrightarrow \vec{K}_t = \underbrace{\int d\vec{x}\, \vec{x}\, n}_{\equiv \vec{K}} - t\vec{P} \qquad (1)$$

$\Downarrow$ もし、相互作用がスケール不変であれば

- スケール対称性 ($\vec{x} \to e^{\lambda}\vec{x}$, $t \to e^{2\lambda} t$)

$$\longleftrightarrow \quad D_t = \underbrace{\int d\vec{x}\ \vec{x}\cdot\vec{J}}_{\equiv D} - 2tH \qquad (2)$$

- 共形対称性 ($\vec{x} \to \dfrac{\vec{x}}{1+ct}$, $t \to \dfrac{t}{1+ct}$)
(conformal)

$$\longleftrightarrow \quad C_t = \underbrace{\int d\vec{x}\ \frac{x^2}{2} n}_{\equiv C} - tD + t^2 H \qquad (3)$$

(1) $$\dot{\vec{K}}_t = -i[\vec{K}_t, H] + \frac{\partial \vec{K}_t}{\partial t}$$

$$= -i\underbrace{[\vec{K}, H]} - \vec{P} = 0$$

$$[\vec{K}, H] = \int d\vec{x}\ \vec{x}\ \underbrace{[n, H]}_{i\dot{n} = -i\nabla\cdot\vec{J}}$$

(連続の方程式)

$$= -i\int d\vec{x}\ \vec{x}\,(\nabla\cdot\vec{J})$$

$$= i\int d\vec{x}\ \vec{J} = i\vec{P}$$

(2) $\dot{D}_t = -i[D_t, H] + \frac{\partial D_t}{\partial t}$

$= -i[D, H] - 2H$

$\downarrow$ 具体例

$$H = \int d\vec{x}\, \psi_\sigma^\dagger(\vec{x}) \left(-\frac{\nabla^2}{2m}\right) \psi_\sigma(\vec{x})$$

$$+ \int d\vec{x}\, d\vec{y}\, \psi_\uparrow^\dagger(\vec{x}) \psi_\downarrow^\dagger(\vec{y}) V(\vec{x}-\vec{y}) \psi_\downarrow(\vec{y}) \psi_\uparrow(\vec{x})$$

有限スケール変換

$$e^{-i\lambda D} \psi(\vec{x}) e^{i\lambda D} = \psi_\lambda(\vec{x})$$

$$\frac{d}{d\lambda} \psi_\lambda(\vec{x}) = e^{-i\lambda D} \underbrace{i[\psi(\vec{x}), D]}_{-i\vec{x}\cdot\vec{\nabla}\psi - i\frac{d}{2}\psi} e^{i\lambda D}$$

$$= \left(\vec{x}\cdot\vec{\nabla} + \frac{d}{2}\right) \psi_\lambda(\vec{x})$$

$$\Rightarrow \psi_\lambda(\vec{x}) = e^{\lambda\frac{d}{2}} \psi(e^\lambda \vec{x})$$

従って、ハミルトニアンは

$$e^{-i\lambda D} H e^{i\lambda D}$$

$$= e^{\lambda d}\int d\vec{x}\; \psi^\dagger_\sigma(e^\lambda \vec{x}) \left(-\frac{\nabla^2}{2m}\right) \psi_\sigma(\underbrace{e^\lambda \vec{x}}_{\vec{x}'})$$

$$+ e^{2\lambda d}\int d\vec{x}\, d\vec{y}\; \psi^\dagger_\uparrow(e^\lambda \vec{x})\, \psi^\dagger_\downarrow(e^\lambda \vec{y})\, V(\vec{x}-\vec{y})\, \psi_\downarrow(e^\lambda \vec{y}) \times \psi_\uparrow(e^\lambda \vec{x})$$

$$= e^{2\lambda}\int d\vec{x}'\; \psi^\dagger_\sigma(\vec{x}') \left(-\frac{\nabla'^2}{2m}\right) \psi_\sigma(\vec{x}')$$

$$+ e^{2\lambda}\int d\vec{x}'\, d\vec{y}'\; \psi^\dagger_\uparrow(\vec{x}')\, \psi^\dagger_\downarrow(\vec{y}')\, \underbrace{e^{-2\lambda} V(e^{-\lambda}\vec{x}' - e^{-\lambda}\vec{y}')}_{V'(\vec{x}'-\vec{y}')} \times \psi_\downarrow(\vec{y}')\, \psi_\uparrow(\vec{x}')$$

$$\equiv e^{2\lambda} H'$$

と変換する。

つまり、ポテンシャルが

$$V(\vec{r}) \longrightarrow V'(\vec{r}) = e^{-2\lambda} V(e^{-\lambda}\vec{r})$$

と変化する。

一般には $V'(\vec{r}) \neq V(\vec{r})$

$\Longleftrightarrow$ スケール不変でない。

スケール不変な相互作用

$$\Longleftrightarrow \underbrace{V'(\vec{r})}_{e^{-2\lambda} V(e^{-\lambda}\vec{r})} = V(\vec{r})$$

例) • $V(\vec{r}) = 0$

• $V(\vec{r}) = \dfrac{\#}{r^2} \longrightarrow e^{-2\lambda}\dfrac{\#}{(e^{-\lambda}r)^2} = \dfrac{\#}{r^2}$

ただし $\# > -\left(\dfrac{d-2}{2}\right)^2$

$\# < -\left(\dfrac{d-2}{2}\right)^2$ のとき

<u>量子異常</u>による破れ

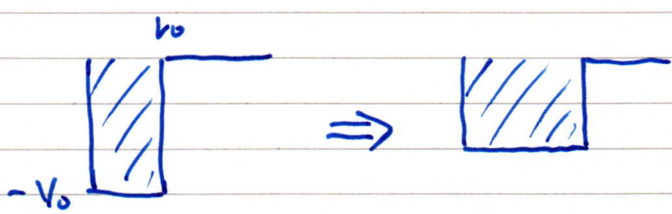
• ゼロレンジ極限 + ユニタリー極限

$V(\vec{r}) = -V_0\,\theta(r_0 - r)$

$$\longrightarrow V'(\vec{r}) = -e^{-2\lambda} V_0 \underbrace{\theta(r_0 - e^{-\lambda} r)}_{\theta(e^{\lambda} r_0 - r)}$$

つまり、ポテンシャルのレンジ $r_0 \to e^{\lambda} r_0$

深さ $V_0 \to e^{-2\lambda} V_0$



散乱長 $a = r_0 - \dfrac{1}{k_0 \cot k_0 r_0}$ $\left(V_0 = \dfrac{k_0^2}{2\mu}\right)$ なので、

$a \to e^{\lambda} a$

ユニタリー極限 $a \to \infty$

ゼロレンジ極限 $r_0 \to 0$

$$\underbrace{k_0 = \frac{\pi}{2}\frac{1}{r_0} \to \infty}$$

$a = \infty \to \infty$
$r_0 = 0 \to 0$
$k_0 = \infty \to \infty$

なので、スケール不変！

$\Rightarrow$ スケール不変な相互作用

$V'(\vec{r}) = V(\vec{r}) \Rightarrow H' = H$

$$e^{-i\lambda D} H e^{i\lambda D} = e^{2\lambda} H$$

$$\Rightarrow -i\lambda [D, H] = 2\lambda H$$

$$\Rightarrow [D, H] = 2i H$$

よって、$\dot{D}_t = -i[D, H] - 2H$

$= 0$ //

(3) $\dot{C}_t = -i[C_t, H] + \frac{\partial C}{\partial t}$

$$= -i[C, H] - i\underbrace{[-tD, H]}_{(-t)\,2iH} - D + 2tH$$

$$= -i\underbrace{[C, H]}_{} - D = 0$$

$$[C, H] = \int d\vec{x}\, \frac{x^2}{2} \underbrace{[n, H]}_{i\dot{n} = -i\nabla\cdot\vec{J}}$$ (連続の方程式)

$$= -i\int d\vec{x}\, \frac{x^2}{2}\, \nabla\cdot\vec{J}$$

$$= i\int d\vec{x}\, \vec{x}\cdot\vec{J} = iD$$

交換関係 まとめ

$$\left.\begin{aligned} [D, H] &= 2iH \\ [C, H] &= iD \\ [D, C] &= -2iC \end{aligned}\right\}$$ SO(2,1) Lorentz group

$$\left(\begin{aligned} [D, C] &= \int d\vec{x} \int d\vec{y}\, \vec{x}\cdot \frac{y^2}{2} [\underset{-\frac{i}{2}\psi^\dagger\overleftrightarrow{\nabla}\psi}{\vec{J}(\vec{x})}, \underset{\psi^\dagger\psi}{n(\vec{y})}] \\ &= -2i\int dy\, \frac{y^2}{2}\, \psi^\dagger\psi = -2iC \end{aligned} \right)$$

"operator - state correspondence"

場の理論の演算子の次元 Δ_O

$\Updownarrow \quad E = \Delta_O \hbar\omega$

調和振動子中のエネルギー固有値 E

演算子 $O(t, \vec{x}) = e^{iHt - i\vec{P}\cdot\vec{x}} \underbrace{O(0, \vec{0})}_{t=0,\ \vec{x}=0\ \text{を考える.}} e^{-iHt + i\vec{P}\cdot\vec{x}}$

$O \equiv O(0, \vec{0})$

演算子の(スケール)次元 Δ_O

例) $O = \phi \Rightarrow [D, \phi] = i \underbrace{\frac{d}{2}}_{\Delta_O} \phi$

$O = H \Rightarrow [D, H] = i \underbrace{2}_{\Delta_O} H$

$\therefore \quad [D, O] = i \underline{\Delta_O} O$

$[D, C] = -2iC$ より、Cの次元 $\Delta = -2$

$\Rightarrow$ $[C, O] \equiv O_{new}$ とすると、

$$[D, O_{new}] = [D, [C, O]]$$

$$= [C, \underbrace{[D, O]}_{i\Delta_O O}] + [\underbrace{[D, C]}_{-2iC}, O]$$

$$= \underbrace{i(\Delta_O - 2)}_{\Delta_{O_{new}}} \underbrace{[C, O]}_{O_{new}}$$

つまり、$O_{new} = [C, [C, [C, \cdots, [C, O]]]]$ とすれば、

$\Delta_{O_{new}} = \Delta_O - 2 - 2 - 2 \cdots$ となり底抜け。

ただし、$\Delta_O \geq \frac{d}{2}$ (unitarity bound) が示せるので、

$[C, O] = 0$ となる O が存在する。

$\Rightarrow$ $O = O_{pri}$ プライマリ演算子

例) $O = \phi(\vec{x})$: $[C, \phi(\vec{x})] = \frac{x^2}{2}\phi(\vec{x})$

$\rightarrow 0$ $(\vec{x} \to \vec{0})$ ○

$O = \nabla^2\phi(\vec{x})$: $[C, \nabla^2\phi(\vec{x})] = \nabla^2\left[\frac{x^2}{2}\phi(\vec{x})\right]$

$\rightarrow d\,\phi(\vec{0})$ ×

(証明)

調和振動子ハミルトニアン

$$H_{osc} = \int d\vec{x}\, \psi_\sigma^\dagger \left(-\frac{\nabla^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2\right) \psi_\sigma$$

$$+ \int d\vec{x}\, d\vec{y}\; \psi_\uparrow^\dagger(\vec{x})\, \psi_\downarrow^\dagger(\vec{y})\, V(\vec{x}-\vec{y})\, \psi_\downarrow(\vec{y})\, \psi_\uparrow(\vec{x})$$

$$= H + \omega^2 C$$

真空

状態 $|\Psi_\alpha\rangle = e^{-H/\omega}\, \mathcal{O}_{pri}(0)\, |vac\rangle$ を作ると

$$H_{osc}|\Psi_\alpha\rangle = e^{-H/\omega} \underbrace{e^{H/\omega} H_{osc}\, e^{-H/\omega}}_{H_{osc} + \frac{1}{\omega}\underbrace{[H, H_{osc}]}_{\substack{\omega^2[H,C] \\ = -i\omega^2 D}} + \frac{1}{2\omega^2}\underbrace{[H, \underbrace{[H, H_{osc}]}_{-i\omega^2 D}]}_{-2\omega^2 H} + \underbrace{\cdots}_{\Downarrow\, 0}} \mathcal{O}_{pri}\, |vac\rangle$$

$$= e^{-H/\omega}\left(\cancel{H} + \omega^2 C - i\omega D - \cancel{H}\right) \mathcal{O}_{pri}\, |vac\rangle$$

$$= e^{-H/\omega}\left(\omega^2 \underbrace{[C, \mathcal{O}_{pri}]}_{0} - i\omega \underbrace{[D, \mathcal{O}_{pri}]}_{i\Delta_\alpha \mathcal{O}_{pri}}\right) |vac\rangle$$

$$= \Delta_\alpha\, \omega\, \underbrace{e^{-H/\omega}\, \mathcal{O}_{pri}\, |vac\rangle}_{|\Psi_\alpha\rangle}$$

⇒ 次元 Δ_a のプライマリ演算子 $\mathcal{O}_{pri}$ に対応して
エネルギー $E = \Delta_a \hbar\omega$ の固有状態が存在！
"operator - state correspondence"

$$\Delta_a \rightleftarrows E = \Delta_a \hbar\omega$$

実験で測れる

OPE などに必要

演算子積展開

$$\underbrace{\mathcal{O}_A(\vec{x})\,\mathcal{O}_B(\vec{0})}_{\Delta_A + \Delta_B} = \sum_C W_C(\vec{x}) \underbrace{\mathcal{O}_C(\vec{0})}_{\Delta_C}$$

次元 $\Delta_A + \Delta_B - \Delta_C$

$$\therefore\ W_C(\vec{x}) \sim |\vec{x}|^{\Delta_C - \Delta_A - \Delta_B}$$

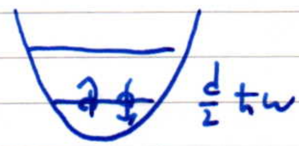
⇒ 近距離 $\vec{x} \sim \vec{0}$ では
小さい Δ_C を持つ演算子が重要！

応用例1） 調和振動子中の2粒子↑↓のユニタリ極限の基底状態のエネルギー

2粒子演算子

$\phi(t,\vec{x}) = \psi_\downarrow \psi_\uparrow(t,\vec{x})$

自由場（相互作用なし） $\Delta_\phi = \frac{d}{2} + \frac{d}{2} = d$

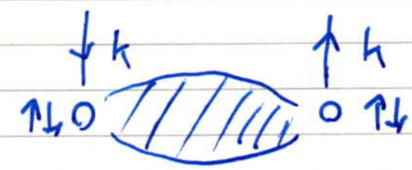


相互作用があると $\Delta_\phi \neq d$ ← 異常次元

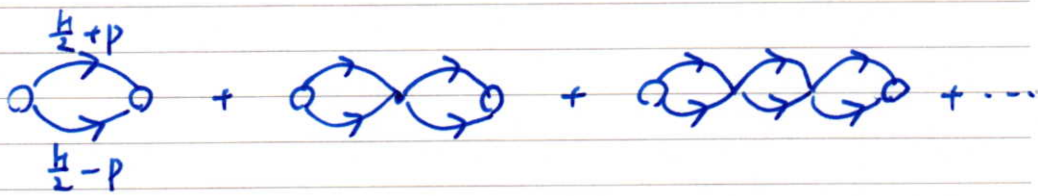
相関関数は

$$\int dt\, d\vec{x}\, e^{ik_0 t - i\vec{k}\cdot\vec{x}} \langle T\, \phi(t,\vec{x})\, \phi^\dagger(0,\vec{0}) \rangle$$

=



=



$$= \frac{(-iT) - ig}{(ig)^2}$$

ただし $\frac{1}{g} - \int^{\Lambda} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{m}{p^2} = 0$ より

$$g = \frac{2\pi^2}{m\Lambda} \to 0$$

$$\to \frac{1}{g^2}\, iT(k)$$

$$= \frac{1}{g^2} \frac{4\pi}{m} \frac{i}{ik + \underbrace{\tfrac{1}{a}}_{\to 0}}$$

$$\sim \Lambda^2 \to \infty \quad \underbrace{(\Lambda \to \infty)}_{\text{ゼロ・レンジ}}$$ と発散！

繰り込まれた演算子

$$\tilde{\phi}(t, \vec{x}) = g \underbrace{\psi_\downarrow \psi_\uparrow}_{\sim \Lambda}(t, \vec{x})$$ と定義すると

相関関数は

$$\underbrace{\int dt\, d\vec{x}}_{-5}\ \underbrace{\langle T\, \tilde{\phi}^\dagger \tilde{\phi} \rangle}_{2\Delta_\phi} = \underbrace{\frac{4\pi}{mk}}_{-1}$$ と有限

$$\Rightarrow \Delta_\phi = 2 = \Delta_{free} \underbrace{-1}_{\text{異常次元}}$$

従って， $E_{unitary} = 2\hbar\omega \leftrightarrow E_{free} = 3\hbar\omega$

確認）$H_{osc}\psi(\vec{x},\vec{y}) = E\psi(\vec{x},\vec{y})$

with $\psi(\vec{x},\vec{y})\Big|_{|\vec{x}-\vec{y}|\to 0} \propto \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|}$

$$H_{osc} = -\frac{\nabla_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2 - \frac{\nabla_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 y^2$$

解）$\psi(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{|\vec{x}-\vec{y}|} e^{-\frac{x^2+y^2}{2m\omega}}$

はエネルギー固有状態であり、

$E = 2\hbar\omega$ を得ます。