エフィモフ効果

Schrödinger方程式

$$\left[-\frac{\nabla_1^2}{2m}-\frac{\nabla_2^2}{2m}-\frac{\nabla_3^2}{2m}\right]\Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3)=E\,\Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3)$$

with Bethe-Peierls boundary condition for $a\to\infty$

$$\lim_{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|\to 0}\Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3)\propto\left(\frac{1}{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}+O(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|)\right)\chi(\vec{r}_3)$$

⇒ 変数分離 $\Psi=\frac{1}{R^2}F(R)\,\Phi(\vec{\Omega})$

hyperradius

hyperangles (5自由度)

$$R=\sqrt{\frac{|\vec{r}_1-\vec{r}_2|^2+|\vec{r}_2-\vec{r}_3|^2+|\vec{r}_3-\vec{r}_1|^2}{3}}$$

$$\begin{cases}\left[-\frac{1}{2m}\left(\frac{d^2}{dR^2}+\frac{d}{dR}\right)+\frac{s^2}{2mR^2}\right]F(R)=E\,F(R)\\[2ex]\hat{\Lambda}^2\,\Phi(\vec{\Omega})=s^2\,\Phi(\vec{\Omega})\end{cases}$$

分離定数

$s=i\cdot 1.00624\cdots\equiv i s_0$

となる解がある

$$\Rightarrow\quad E_n\propto e^{-2\pi n/s_0}$$ //

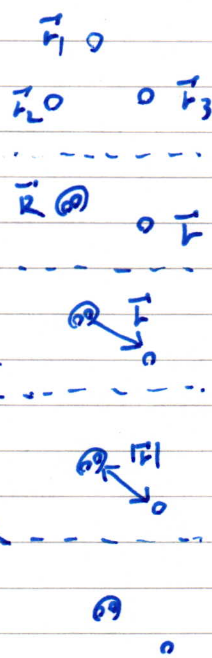
別の解法）

Schrödinger 方程式

$$\left[\underbrace{-\frac{\nabla_1^2}{2m}-\frac{\nabla_2^2}{2m}-\frac{\nabla_3^2}{2m}}_{H_0}\underbrace{-g\,\delta(\vec r_1-\vec r_2)-g\,\delta(\vec r_2-\vec r_3)-g\,\delta(\vec r_3-\vec r_1)}_{V}\right]$$

$$\times\,\Psi(\vec r_1,\vec r_2,\vec r_3)=\underbrace{E}_{E<0\ \Longleftrightarrow\ \text{束縛状態}}\Psi(\vec r_1,\vec r_2,\vec r_3)$$

ボース粒子 $\Rightarrow$ $\Psi(\vec r_1,\vec r_2,\vec r_3)=\Psi(\underbrace{\{\vec r_1,\vec r_2,\vec r_3\}}_{\text{任意の入れ替え}})$



格子系

連続系

9自由度

↓ 接触型相互作用 (−3)

6自由度

↓ 並進対称性 (−3)

3自由度

↓ 回転対称性 (−2)

1自由度

↓ スケール対称性 (−1)

0自由度

↳ S_0を決める方程式

$$[H_0 + V]\,\Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3) = E\,\Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3)$$

$$\Rightarrow\quad [E - H_0]\,\Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3) = V\,\Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3)$$

$\Rightarrow$ Lippmann−Schwinger 方程式

$$\Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3) = \frac{1}{E - \underset{\sim}{H_0}}\,V\,\Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3)$$

$\Rightarrow$ フーリエ変換

$$\tilde{\Psi}(k_1,k_2,k_3) = \int_{r_1 r_2 r_3} e^{-ik_1r_1 - ik_2r_2 - ik_3r_3}\,\Psi(r_1,r_2,r_3)$$

$$= \frac{-g}{E - \frac{k_1^2+k_2^2+k_3^2}{2m}} \int_{r_1r_2r_3} e^{-ik_1r_1 - ik_2r_2 - ik_3r_3}$$

$$\times\,[\delta_{r_1r_2} + \delta_{r_2r_3} + \delta_{r_3r_1}]\,\Psi(r_1,r_2,r_3)$$

$$= \frac{-g}{E - \frac{k_1^2+k_2^2+k_3^2}{2m}} \int_{R,r} \Big[e^{-i(k_1+k_2)R - ik_3r} + e^{-i(k_2+k_3)R - ik_1r} + e^{-i(k_3+k_1)R - ik_2r} \Big]\,\Psi(\underbrace{R,R,r}_{\text{入れ替え対称}})$$

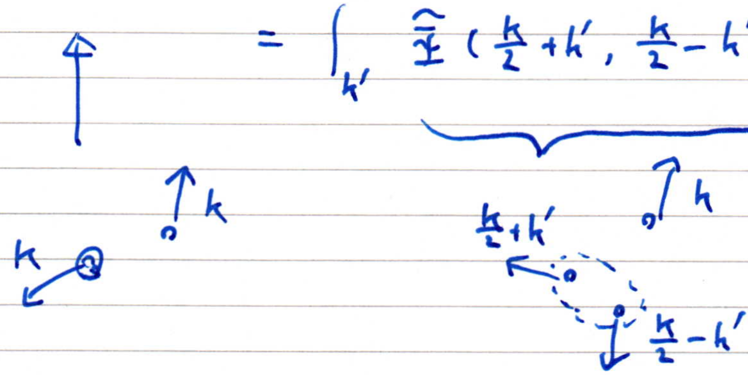
$$\Psi(R,R,r) = \varphi(R;r) \quad \text{とすると}$$

$$= \frac{-g}{E - \frac{k_1^2+k_2^2+k_3^2}{2m}} \Big[\tilde{\varphi}(k_1+k_2;k_3) + \tilde{\varphi}(k_2+k_3;k_1) + \tilde{\varphi}(k_3+k_1;k_2) \Big] \quad \text{-----}\ (*)$$

$$\tilde{f}(K;k) \equiv \int_{R,r} e^{-iK\cdot R - ik\cdot r} \underbrace{f(R;r)}_{\Phi(R,R,r)}$$

$$= \int_{R,r} e^{-iKR - ikr} \int_{k_1 k_2 k_3} e^{ik_1 R + ik_2 R + ik_3 r} \times \tilde{\Phi}(k_1, k_2, k_3)$$

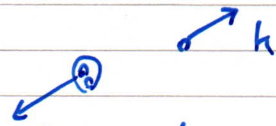
$$= \int_{k'} \underbrace{\tilde{\Phi}\left(\frac{K}{2}+k', \frac{K}{2}-k', k\right)}$$



(*)を代入すると

$$= \int_{k'} \frac{-g}{E - \frac{(\frac{K}{2}+k')^2 + (\frac{K}{2}-k')^2 + k^2}{2m}} \left[\tilde{f}(K;k) + \underbrace{\tilde{f}\left(\frac{K}{2}+k-k'; \frac{K}{2}+k'\right) + (k' \to -k')}_{2\underbrace{\tilde{f}\left(\frac{K}{2}+k-k'; \frac{K}{2}+k'\right)}_{6\text{自由度}}} \right]$$

$\tilde{f}(K;k)$



$k \to -k$

並進対称性 $\Rightarrow$ 重心運動量 $\vec{K}+\vec{k}$ は保存

重心系 $\vec{K}+\vec{k}=\vec{0}$ を考えて.

$\underbrace{\tilde{f}(K;k)}_{6自由度} \longrightarrow \tilde{f}(-k;k) \equiv \underbrace{\tilde{f}_0(k)}_{3自由度}$ とすると.

$$\tilde{f}_0(k) = \int_{k'} \frac{-g}{E - \frac{\frac{3}{4}k^2 + k'^2}{2m}} \left[\tilde{f}_0(k) + 2\tilde{f}_0\left(-\frac{k}{2}+k'\right) \right]$$

$$= \int_{k'} \frac{-g}{E - \frac{\frac{3}{4}k^2 + k'^2}{2m}} \cdot \tilde{f}_0(k)$$

$$+ \int_{k'} \frac{-g}{E - \frac{k^2 + k\cdot k' + k'^2}{2m}} \cdot 2\tilde{f}_0(k')$$

$\Leftrightarrow$ $\tilde{f}_0(\vec{k})$ に関する3次元積分方程式

（格子系ではココまで）

(連続系では) ように変形して

$$\left[\frac{1}{g} - \int_{k'} \frac{2m}{\frac{3}{4}k^2 + k'^2 - 2mE}\right] \hat{\varphi}_0(k)$$

$$= \int_{k'} \frac{4m}{k^2 + k\cdot k' + k'^2 - 2mE}\,\hat{\varphi}_0(k')$$

$$\underbrace{\frac{1}{g} - \int_{k'} \frac{2m}{k'^2}}_{-\frac{m}{2\pi a}} - \underbrace{\int_{k'}\left(\frac{2m}{\frac{3}{4}k^2 - 2mE + k'^2} - \frac{2m}{k'^2}\right)}_{-\frac{m}{2\pi}\sqrt{\frac{3}{4}k^2 - 2mE}}$$

$$\Rightarrow \left[\sqrt{\frac{3}{4}\vec{k}^2 - 2mE} - \frac{1}{a}\right] \hat{\varphi}_0(\vec{k})$$

$$= \int_{\vec{k}'} \frac{8\pi}{\vec{k}^2 + \vec{k}\cdot\vec{k}' + \vec{k}'^2 - 2mE}\,\underbrace{\tilde{\varphi}_0(\vec{k}')}_{3\text{自由度}}$$

回転対称性 ⇒ 角運動量 L は保存

L=0 を考えて $\underbrace{\tilde{f}_0(\vec{k})}_{\text{3自由度}} \to \underbrace{\tilde{f}_0(|\vec{k}|)}_{\text{1自由度}}$ とすると.

$$\left[\sqrt{\frac{3}{4}k^2-2mE}-\frac{1}{a}\right]\tilde{f}_0(k)$$

$$=\int\frac{d\vec{k}'}{(2\pi)^3}\,\frac{8\pi}{k^2+\vec{k}\cdot\vec{k}'+k'^2-2mE}\,\tilde{f}_0(k')$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\Lambda}dk'\,\frac{k'}{k}\,\log\left(\frac{k^2+kk'+k'^2-2mE}{k^2-kk'+k'^2-2mE}\right)\tilde{f}_0(k')$$

⟺ $\tilde{f}_0(k)$ に関する 1次元積分方程式

$a=\infty$ で数値的に解くと

$$E_n \to \frac{\Lambda^2}{m}\,e^{-2\pi n/s_0} \qquad (n \gg 1)$$

∴ エフィモフ効果!

$a = \infty$ のとき、 $2mE = \kappa^2$ として

$\kappa \ll k \ll \Lambda$ の領域を考えると

$$\kappa \to 0, \quad \Lambda \to \infty$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} k \underbrace{\tilde{f}_0(k)}_{\propto k^{\gamma-2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dk' \frac{k'}{k} \log\left(\frac{k^2+kk'+k'^2}{k^2-kk'+k'^2}\right) \tilde{f}_0(k')$$

$\propto k^{\gamma-2}$ ⇐ スケール対称性

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}\pi}{4} = \int_0^\infty dz \cdot z^{\gamma-1} \log\left(\frac{z^2+z+1}{z^2-z+1}\right) \qquad \left(z = \frac{k'}{k}\right)$$

$$= \frac{2\pi}{\gamma} \cdot \frac{\sin\left(\frac{\pi}{6}\gamma\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}\gamma\right)}$$

解は $\gamma = 4.46529,\ 6.81836,$

$9.32469,\ 10.8442,\ \cdots$ の他に

$$\gamma = \pm i \cdot 1.00624 = \pm i s_0$$

$$\Rightarrow \tilde{f}_0(k) \propto k^{-2 \pm i s_0} \sim \frac{1}{k^2} \underline{\sin(\ln k + \delta)}$$

ログ周期解

⇓

エフィモフ効果!

マグノン系への応用

$$H = -\frac{1}{2}\sum_{\vec{r}}\sum_{\hat{e}=\pm\hat{x},\pm\hat{y},\pm\hat{z}}\left(J S^{+}_{\vec{r}} S^{-}_{\vec{r}+\hat{e}} + J_z S^{z}_{\vec{r}} S^{z}_{\vec{r}+\hat{e}}\right)$$

$$-D\sum_{\vec{r}}(S^{z}_{\vec{r}})^2 - B\sum_{\vec{r}} S^{z}_{\vec{r}}$$

真空 $|0\rangle = |\downarrow\downarrow\cdots\downarrow\rangle \Rightarrow \begin{cases} S^{z}_{\vec{r}}|0\rangle = -S|0\rangle \\ S^{-}_{\vec{r}}|0\rangle = 0 \end{cases}$

N マグノン状態 $|\vec{r}_1,\cdots,\vec{r}_N\rangle = \prod_{i=1}^{N} S^{+}_{\vec{r}_i}|0\rangle$ への

波動関数 $\Psi(\vec{r}_1,\cdots,\vec{r}_N) = \langle\vec{r}_1,\cdots,\vec{r}_N|\Psi\rangle$ が

満たす Schrödinger 方程式は

$$i\partial_t \Psi(\vec{r}_1,\cdots,\vec{r}_N) = \langle 0|\left[\prod_{i=1}^{N} S^{-}_{\vec{r}_i}, H\right]|\Psi\rangle$$

$$= \Big[\sum_{i=1}^{N}\sum_{\hat{e}} SJ(1-\nabla^{i}_{\hat{e}})$$

$$+\sum_{i<j}^{N}\Big\{\sum_{\hat{e}} J\,\delta_{\vec{r}_i,\vec{r}_j}\nabla^{i}_{\hat{e}} - \sum_{\hat{e}} J_z\,\delta_{\vec{r}_i,\vec{r}_j+\hat{e}}$$

近接相互作用

$$-2D\,\delta_{\vec{r}_i,\vec{r}_j}\Big\}\Big]\Psi(\vec{r}_1,\cdots,\vec{r}_N)$$

on-site 相互作用

$$\equiv [H_0 + V]\Psi(\vec{r}_1,\cdots,\vec{r}_N)$$

ただし、

$$\nabla^{i}_{\hat{e}}\Psi(\vec{r}_1,\cdots,\vec{r}_i,\cdots,\vec{r}_N) = \Psi(\vec{r}_1,\cdots,\vec{r}_i+\hat{e},\cdots,\vec{r}_N)$$

特に N=3 のとき、束縛状態 E<0 に対する

Lippmann-Schwinger 方程式は

$$\Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3) = \frac{1}{E-H_0}\underbrace{V\,\Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3)}_{\substack{\vec{r}_1=\vec{r}_2 \text{ or } \vec{r}_1=\vec{r}_2+\hat{e} \\ 2\ \ 3 \qquad\quad 2\ \ 3 \\ 3\ \ 1 \qquad\quad 3\ \ 1}}$$

⇓ フーリエ変換 etc.

$$\chi_{\vec{K}}(\vec{r};\vec{k}) = \int_{-\pi/a}^{\pi/a}\frac{d\vec{k}'}{(2\pi/a)^3}\frac{\cos\left(\frac{\vec{K}+2\vec{k}'-\vec{k}}{2}\cdot\vec{r}\right)}{E-E_0(\vec{k})-E_0(\vec{k}')-E_0(\vec{K}-\vec{k}-\vec{k}')}$$

$$\times\Big[\sum_{\hat{e}}\Big\{J\cos\left(\frac{\vec{K}-\vec{k}}{2}\cdot\hat{e}\right)-J_z\cos\left(\frac{\vec{K}+2\vec{k}'-\vec{k}}{2}\cdot\hat{e}\right)\Big\}\chi_{\vec{K}}(\hat{e};\vec{k})$$

$$+2\sum_{\hat{e}}\Big\{J\cos\left(\frac{\vec{K}-\vec{k}'}{2}\cdot\hat{e}\right)-J_z\cos\left(\frac{\vec{K}+2\vec{k}'-\vec{k}}{2}\cdot\hat{e}\right)\Big\}\chi_{\vec{K}}(\hat{e};\vec{k}')$$

$$-2D\,\chi_{\vec{K}}(\vec{0};\vec{k}) - 4D\,\chi_{\vec{K}}(\vec{0};\vec{k}')\Big]$$

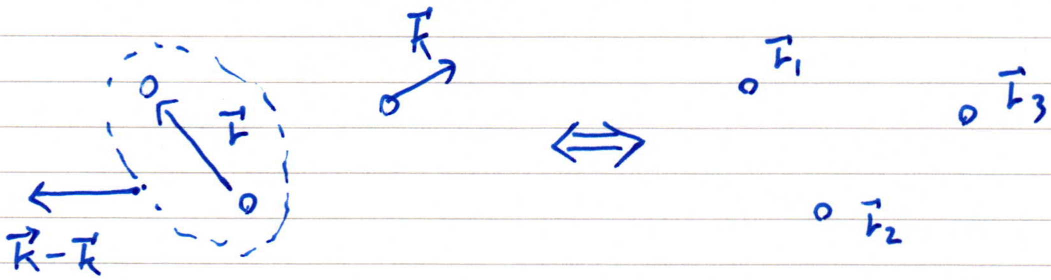
ただし、$E_0(\vec{k}) \equiv \sum_{\hat{e}} SJ\,[1-\cos(\vec{k}\cdot\hat{e})]$

は1粒子エネルギー

$$\chi_{\vec{K}}(\vec{r};\vec{k}) \equiv \sum_{n_1 n_2 n_3} \int_{\vec{r}_1,\vec{r}_1-\vec{r}_2} e^{-i(\vec{K}-\vec{k})\cdot\frac{\vec{r}_1+\vec{r}_2}{2} - i\vec{k}\cdot\vec{r}_3} \times \Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3)$$

重心運動量　　残りの粒子の運動量

2つの粒子間距離



$\Longrightarrow$ $\vec{r}=\vec{0}, \vec{c}$ とおくと

$\chi_{\vec{K}}(\vec{0};\vec{k}), \chi_{\vec{K}}(\vec{c};\vec{k})$ に関する

3次元積分方程式

$\Longrightarrow$ エフィモフ効果!

$\vec{K}=\vec{0}$

$a=\infty$

$H=2$ のとき、散乱状態 $E \geq 0$ に対する

Lippmann-Schwinger 方程式は

$$\Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = \underbrace{\Phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)}_{H_0\Phi = E\Phi \text{ の解}} + \frac{1}{E-H_0+i0^+}\underbrace{V\Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)}_{r_1=r_2,\ r_1=r_2+\hat{e}}$$

並進対称性より重心運動量 $\vec{K}$ は保存するので

$$\Psi(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = e^{i\vec{K}\cdot\vec{R}}\,\psi_{\vec{K}}(\vec{r})$$ とすると、

重心座標 $\vec{R} = \frac{\vec{r}_1+\vec{r}_2}{2}$　　相対座標 $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$

$$\tilde{\psi}_{\vec{K}}(\vec{k}) \equiv \sum_{\vec{r}} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,\psi_{\vec{K}}(\vec{r})$$

$$= \phi_{\vec{K}}(\vec{k}) + \frac{1}{E-E_0(\frac{\vec{K}}{2}+\vec{k})-E_0(\frac{\vec{K}}{2}-\vec{k})}$$

$$\times\Big[\sum_{\hat{e}}\Big\{J\cos\Big(\frac{\vec{K}}{2}\cdot\hat{e}\Big) - J_z\cos(\vec{k}\cdot\hat{e})\Big\}\psi_{\vec{K}}(\hat{e})$$

$$- 2D\,\psi_{\vec{K}}(\vec{0})\Big]$$

$\Downarrow$ 逆フーリエ変換

$$\psi_{\vec{K}}(\vec{r}) = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d\vec{k}}{(2\pi/a)^3}\, \tilde{\psi}_{\vec{K}}(\vec{k})$$

$$= \phi_{\vec{K}}(\vec{r}) + \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d\vec{k}}{(2\pi/a)^3} \cdot \frac{\cos(\vec{k}\cdot\vec{r})}{E - E_0(\frac{\vec{K}}{2}+\vec{k}) - E_0(\frac{\vec{K}}{2}-\vec{k})}$$

$$\times \Big[\sum_{\hat{e}} \{ J\cos(\tfrac{\vec{K}}{2}\cdot\hat{e}) - J_z \cos(\vec{k}\cdot\hat{e}) \} \psi_{\vec{K}}(\hat{e})$$

$$- 2D\, \psi_{\vec{K}}(\vec{0}) \Big]$$

$\vec{r} = \vec{0}, \hat{e}$ とおくと

$\psi_{\vec{K}}(\vec{0}), \psi_{\vec{K}}(\hat{e})$ に関する方程式

決定

特に $E=0$, $\vec{K}=\vec{0}$ のとき、$\phi_0(\vec{r}) = \mathrm{const.}$ なので、

$$\psi_0(\vec{r}) = C - \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d\vec{k}}{(2\pi/a)^3} \frac{\cos(\vec{k}\cdot\vec{r})}{2E_0(\vec{k})}$$

$$\times \Big[\sum_{\hat{e}} \{ J - J_z\cos(\vec{k}\cdot\hat{e}) \} \psi_0(\hat{e}) - 2D\,\psi_0(\vec{0}) \Big]$$

$|\vec{r}|/a \to \infty$ と考えると、

$$\begin{cases} \cos(\vec{k}\cdot\hat{e}) \to 1 \\ 2E_0(\vec{k}) \to 2SJ(ka)^2 \end{cases}$$ なので、

$$\psi_0(\vec{r}) \to c - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\vec{k}}{(2\pi/a)^3} \cdot \frac{\cos(\vec{k}\cdot\vec{r})}{(ka)^2}$$

$$\times \frac{(J-J_z)\sum_{\hat{e}} \psi_0(\hat{e}) - 2D\,\psi_0(\vec{0})}{2SJ}$$

$$= c - \frac{a}{4\pi r} \cdot \frac{(J-J_z)\sum_{\hat{e}} \psi_0(\hat{e}) - 2D\,\psi_0(\vec{0})}{2SJ}$$

$$\equiv c\left(1 - \frac{a_s}{r}\right)$$

従って、マグノン間の散乱長は

$$\frac{a_s}{a} = \frac{(J-J_z)\sum_{\hat{e}} \psi_0(\hat{e}) - 2D\,\psi_0(\vec{0})}{8\pi SJ \cdot c}$$

解 $\psi_0(\hat{e})$, $\psi_0(\vec{0})$ を代入すると

$$\frac{a_s}{a} = \frac{\frac{3}{2\pi}\left[1-\frac{D}{3J}-\frac{J_z}{J}\left(1-\frac{D}{6SJ}\right)\right]}{2S-1+\frac{J_z}{J}\left(1-\frac{D}{6SJ}\right)+3W\left[1-\frac{D}{3J}-\frac{J_z}{J}\left(1-\frac{D}{6SJ}\right)\right]}$$

ワトソン積分(単純立方格子)

$$W = \int_{-\pi/a}^{\pi/a}\frac{d\vec{k}}{(2\pi/a)^3}\,\frac{1}{3-\frac{1}{2}\sum_{\hat{e}}\cos(\vec{k}\cdot\hat{e})}$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{96\pi^3}\,\Gamma\left(\tfrac{1}{24}\right)\Gamma\left(\tfrac{5}{24}\right)\Gamma\left(\tfrac{7}{24}\right)\Gamma\left(\tfrac{11}{24}\right)$$

$$\simeq 0.505462$$

ユニタリー極限 "$a_s \to \infty$"

$\Longrightarrow$ エフィモフ効果 for マグノン