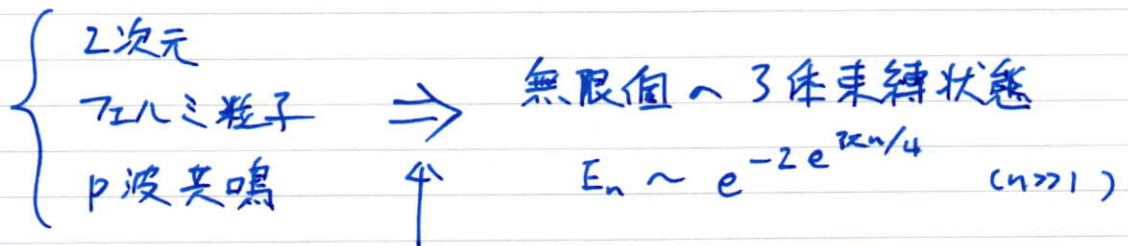


"スーパーエフェクト"

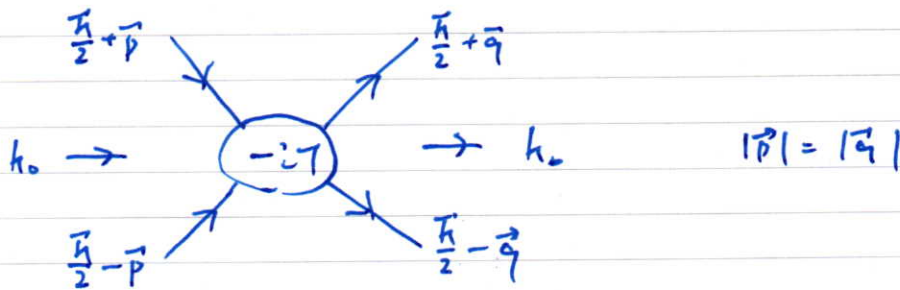


繰り込み群の方法

短距離ポテンシャル $V(r) \sim$

相互作用する 2つのフェルミ粒子

最低の部分波 = p波 ($l=1$)



p波 T 行列

$$\begin{aligned}
 -iT(k) &= \frac{16i}{m} f_p(k) \\
 &= \frac{16i}{m} \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{-i m E + m E \cot \delta}
 \end{aligned}$$

重心系でのエネルギー $E = k_0^2 - \frac{\hbar^2}{4m} + i0 +$
 全エネルギー \leftarrow \leftarrow 重心の運動エネルギー

effective range 展開

$$-2T(k) = \frac{16i}{m} \frac{\vec{p} \cdot \vec{q}}{-\frac{1}{a} - \frac{mE}{\pi} \ln\left(-\frac{\Delta^2}{mE}\right) + (kE)^2 + (kE)^4 + \dots}$$

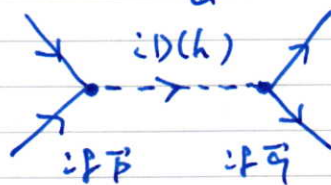
↑
"散乱長" "effective range"

$$\begin{array}{l} a \rightarrow \infty \\ \longrightarrow \\ E \rightarrow 0 \end{array} \quad \underbrace{-\frac{16\pi}{m^2 \ln\left(-\frac{\Delta^2}{mE}\right)} \vec{p} \cdot \vec{q}}_{\frac{\rho}{m^2} (i\rho)^2} \quad \underbrace{\frac{i}{k_0 - \frac{k^2}{4m} + i0^+}}_{iD(k)}$$

70口1104"-夕



$$\begin{array}{l} a \rightarrow \infty \\ \longrightarrow \\ E \rightarrow 0 \end{array}$$



複合ボソン

結合定数 $g^2 \sim \frac{2\pi}{\ln\left(-\frac{\Delta^2}{mE}\right)}$ は

低エネルギー ($E \rightarrow 0$) で対数的に減少!

低エネルギー - 有効理論

$$a = \infty \Leftrightarrow \epsilon_0 = \frac{p^2}{2a} \frac{\Delta^2}{m}$$

$$L_2 = \psi^\dagger (i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m}) \psi + \phi_a^\dagger (i\partial_t + \frac{\nabla^2}{4m} - \epsilon_0) \phi_a$$

$$+ \frac{g}{m} \phi_a^\dagger \psi (-i\nabla_a) \psi + \frac{g}{m} \psi^\dagger (-i\nabla_a) \psi \phi_a$$

sum over $a = \pm$, $\nabla_{\pm} \equiv \nabla_x \pm i\nabla_y$

ファインマン・ルール

- フェルミ粒子 ψ のプロパゲータ

$$\begin{array}{c} p \\ \longrightarrow \end{array} \quad iG(p) = \frac{i}{p_0 - \frac{p^2}{2m} + i0^+}$$

- ボース粒子 ϕ_a (角運動量 $a = \pm 1$) のプロパゲータ

$$\begin{array}{c} p \\ \cdots \longrightarrow \cdots \\ a \end{array} \quad iD(p) = \frac{i}{p_0 - \frac{p^2}{4m} + i0^+}$$

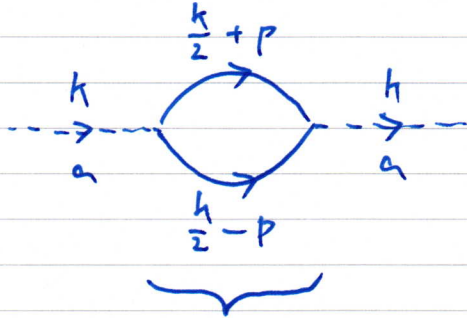
- フェルミ・ボース結合

$$\begin{array}{c} \frac{k}{2} + p \\ \swarrow \\ \bullet \\ \searrow \\ \frac{k}{2} - p \end{array} \begin{array}{c} k \\ \longrightarrow \cdots \\ a \end{array} \quad 2i \frac{g}{m} P_a$$

$$\begin{array}{c} \frac{k}{2} + p \\ \swarrow \\ \bullet \\ \searrow \\ \frac{k}{2} - p \end{array} \begin{array}{c} k \\ \cdots \longrightarrow \\ a \end{array} \quad 2i \frac{g}{m} P_a$$

"Wilson 流線) 込み群"

$e^{-S} \Delta < |\bar{p}| < \Delta$ を積分して k_1 の変化を呉了.



ボース粒子の自己エネルギー $\Sigma(k)$

$$\Sigma(k) = i \left(\frac{g}{m} \right)^2 \int_p \bar{p}^2 :G(\frac{k}{2} + p) :G(\frac{k}{2} - p)$$

$$= 2i \frac{g^2}{m^2} \int_p \bar{p}^2 \frac{1}{k_0 + p_0 - \frac{(\frac{k}{2} + p)^2}{2m} + i0^+} \frac{1}{k_0 - p_0 - \frac{(\frac{k}{2} - p)^2}{2m} + i0^+}$$

$$= 2 \frac{g^2}{m^2} \int_p \frac{\bar{p}^2}{k_0 - \frac{k^2}{4m} - \frac{\bar{p}^2}{m} + i0^+}$$

$$= \frac{g^2 \Lambda^2}{2\pi m} \quad \text{if } \epsilon_0 = \frac{g^2 \Lambda^2}{2\pi m} \text{ と打ち消し合うので}$$

$$= 2 \frac{g^2}{m^2} \int_p \left(\frac{\bar{p}^2}{k_0 - \frac{k^2}{4m} - \frac{\bar{p}^2}{m} + i0^+} + im \right)$$

" $a_1 = \infty$ "

$$\int_{\partial S_1} \frac{dp \cdot p}{2\pi}$$

$$m \cdot \frac{k_0 - \frac{k^2}{4m}}{k_0 - \frac{k^2}{4m} - \frac{\bar{p}^2}{m} + i0^+}$$

$$= -\frac{g^2}{\pi} \left(h_0 - \frac{\hbar^2}{4m} \right) \ln \frac{\Lambda}{e^S \Lambda}$$

従、2. ボース粒子の7口バグ-Aは

$$-i \langle \phi_a \phi_a^\dagger \rangle (h) = \frac{1}{h_0 - \frac{\hbar^2}{4m} + i0^+}$$

$$\rightarrow \frac{1}{h_0 - \frac{\hbar^2}{4m} - \mathcal{E}(h) + i0^+} = \frac{1}{1 + \frac{g^2}{\pi} S} \cdot \frac{1}{h_0 - \frac{\hbar^2}{4m} + i0^+}$$

$$= \frac{\left(1 - \frac{g^2}{\pi} S \right)}{h_0 - \frac{\hbar^2}{4m} + i0^+} \rightarrow \text{波動関数の} \\ (S \ll 1) \text{ 線1) 辺2) 因子 } \mathcal{E}$$

と変化です。

$$\Rightarrow \mathcal{L}_\Omega \rightarrow \mathcal{L}_{e^S \Omega} = \psi^\dagger \left(i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m} \right) \psi + \frac{1}{2} \phi_a^\dagger \left(i\partial_t + \frac{\nabla^2}{4m} \right) \phi_a \\ + g \phi_a^\dagger \psi (-i\nabla_a) \psi + g \psi^\dagger (-i\nabla_a) \psi \phi_a$$

$\phi_a \rightarrow \sqrt{2} \phi_a$ と再定義すると、

$$\text{結合定数は } g \rightarrow \sqrt{2} g = \left(1 - \frac{g^2}{2\pi} S \right) g$$

と変化です。

結合定数 α の変化を "微分方程式" で表すと

$$\frac{d\alpha}{dS} = -\frac{\alpha^3}{2\pi} \quad \leftarrow \text{繰り込み群方程式}$$

$$\text{解は } \alpha^2(S) = \frac{1}{\frac{1}{\alpha_0^2} + \frac{S}{\pi}} \rightarrow \frac{\pi}{S} \quad (S = \ln \frac{\Lambda}{e^{\gamma_E} \Lambda_0} \rightarrow \infty)$$

\therefore 結合定数 α^2 は "エネルギー $(S \rightarrow \infty)$ に対して
対数的に減少する。

3体問題 \Rightarrow 2粒子と複合ボース粒子への散乱
○ ◎

$$\mathcal{L}_{3\text{-body}} = \frac{g_3}{m} \psi^\dagger \phi_a^\dagger \phi_a \psi + \dots$$

無次元
irrelevant $\rightarrow 0$
 \Leftrightarrow マージナル
(エネルギー極限)



$$\text{c.f. } S = \int d^4x d^2x \mathcal{L}$$

-4

$$[\psi] = [\phi_a] = 1$$

u_3 の繰り込み

$$\text{Diagram 1} + \text{Diagram 2} \sim g^4 \ln \frac{\Lambda}{e^3 \Lambda}$$

$$\text{Diagram 3} \sim g^2 u_3 \ln \frac{\Lambda}{e^3 \Lambda}$$

$$\text{Diagram 4} \sim g^2 u_3 \ln \frac{\Lambda}{e^3 \Lambda}$$

$$\text{Diagram 5} \sim u_3^2 \ln \frac{\Lambda}{e^3 \Lambda}$$

$e^3 \Lambda < |\mathbf{k}| < \Lambda$ の積分だけ

$$u_3 \rightarrow u_3 + \frac{16 g^4}{3\pi} S - \frac{8 g^2 u_3}{3\pi} S + \frac{2 u_3^2}{3\pi} S \dots \textcircled{1}$$

ϕ_a の波動関数繰り込みの条件は

$$\phi_a \rightarrow \sqrt{Z} \phi_a$$

$$Z_{3\text{-body}} = \frac{u_3}{m} \int \phi_a^\dagger \phi_a \rightarrow \frac{u_3 Z}{m} \int \phi_a^\dagger \phi_a$$

$$u_3 - \frac{8 g^2 u_3}{\pi} S \dots \textcircled{2}$$

①と②を合せて、 u_3 の変化は

$$\frac{du_3}{ds} = \frac{16}{3\pi} s^4 - \frac{11}{3\pi} s^2 u_3 + \frac{2}{3\pi} u_3^2$$

低エネルギー極限 $s \rightarrow \infty$ 2", $s^2 \rightarrow \frac{\pi}{s}$ 4" 2",

$$\frac{du_3}{ds} \rightarrow \frac{16\pi}{3s^2} - \frac{11}{3s} u_3 + \frac{2}{3\pi} u_3^2$$

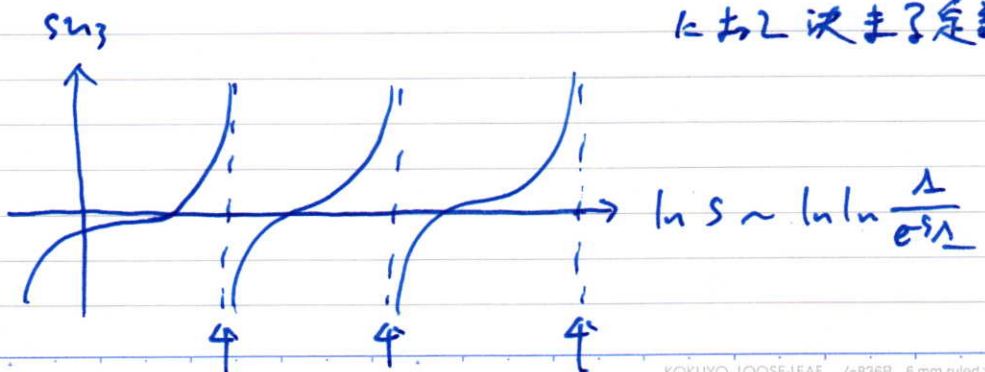
$$\Rightarrow s \frac{d(su_3)}{ds} = s^2 \frac{du_3}{ds} + s u_3$$

$$\begin{aligned} \frac{d(su_3)}{d(\ln s)} &= \frac{16\pi}{3} - \frac{8}{3} (su_3) + \frac{2}{3\pi} (su_3)^2 \\ &= \frac{2}{3\pi} [2\pi - (su_3)]^2 + \frac{8\pi}{3} \end{aligned}$$

従って、 u_3 の低エネルギー2"の振る舞いは

$$u_3 \rightarrow \frac{2\pi}{s} \left\{ 1 - \cot \left[\frac{4}{3} (\ln s - \theta) \right] \right\}$$

↑
UV2"の初期条件
により決まり定数



$$\therefore n_3 \rightarrow \infty \quad \textcircled{B} \quad \frac{4}{3} (\ln S - \theta) = \pi n$$

$$\Leftrightarrow \ln S = \frac{3\pi n}{4} + \theta$$

||

$$\ln \ln \left(\frac{\Lambda}{e^{\theta} \Lambda} \right) = k \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{系} \wedge \text{特徴的} \text{な} \\ \text{運動量} \text{スケール} \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow k_n = \Lambda e^{-e^{3\pi n/4 + \theta}}$$

\Rightarrow 系 \wedge 特徴的 な エネルギー - スケール は

$$E_n \sim \frac{k_n^2}{m} \sim \frac{\Lambda^2}{m} e^{-2e^{3\pi n/4 + \theta}}$$



束縛エネルギー - \sim "貝塔" \sim

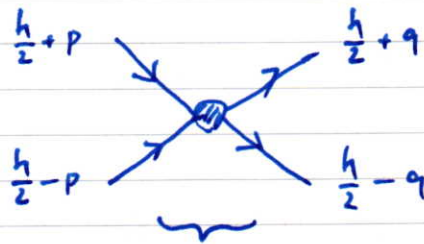
\Rightarrow スピン-エイト効果!

微視的モデルによる確認

$$H = \int_{\vec{k}} \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{\hbar^2}{2m} \psi_{\vec{k}}$$

$$-n_0 \sum_{\alpha=\pm} \int_{\vec{k}, \vec{p}, \vec{q}} p_{\alpha} \psi_{\frac{\hbar}{2}+\vec{p}}^{\dagger} \psi_{\frac{\hbar}{2}-\vec{p}}^{\dagger} e^{-p^2/2\Lambda^2} \\ \times q_{\alpha} \psi_{\frac{\hbar}{2}-\vec{q}} \psi_{\frac{\hbar}{2}+\vec{q}} e^{-q^2/2\Lambda^2}$$

separable
potential



$$2n_0 \vec{p} \cdot \vec{q} e^{-\frac{(p^2+q^2)}{2\Lambda^2}}$$

↑
k, k'

↓↓ 近似至しの数値計算

3次元の束縛エネルギー E_n ($n=0, 1, 2, \dots$)

$$E_n \equiv -\frac{\kappa_n^2}{m}$$

$$\lambda_n \equiv \ln \ln \Lambda / \kappa_n$$

n	λ_n	$\lambda_n - \lambda_{n-1}$	$\frac{\Delta}{k_n} = e^{e^{\lambda_n}}$	束縛状態 の大きさ
0	0.5672	—	5.8	
1	2.770	2.207	10^7	
2	5.078	2.308	10^{67}	
3	7.430	2.352	10^{732}	
4	9.785	2.355	10^{7691}	
5	12.141	2.356	10^{80791}	



$$\frac{7\pi}{4} = 2.35619$$