BCS-BEC クロスオーバー (平均場)

$r_0 \to 0$, $T \to 0$ のとき.

系に存在する長さスケール

- 密度 n → 平均粒子間距離 $n^{-1/3}$
- 相互作用 → 散乱長 a

⇒ 熱力学量を計算したい.

$$\mathcal{L} = \psi^\dagger_\sigma \left(i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu\right)\psi_\sigma + g\,\psi^\dagger_\uparrow \psi^\dagger_\downarrow \psi_\downarrow \psi_\uparrow$$

↓ Hubbard-Stratonovich 変換

$$\mathcal{L}' = \psi^\dagger_\sigma \left(i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu\right)\psi_\sigma - \frac{\phi^\dagger\phi}{g} + \underbrace{\phi^\dagger \psi_\downarrow \psi_\uparrow + \psi^\dagger_\uparrow \psi^\dagger_\downarrow \phi}_{-\frac{(\phi^\dagger - g\psi^\dagger_\uparrow\psi^\dagger_\downarrow)(\phi - g\psi_\downarrow\psi_\uparrow)}{g} + g\,\psi^\dagger_\uparrow\psi^\dagger_\downarrow\psi_\downarrow\psi_\uparrow}$$

$$Z = \int \mathcal{D}[\psi^\dagger,\psi]\underbrace{\mathcal{D}[\phi^\dagger,\phi]}_{\text{ガウス積分を実行}}\, e^{i\int dt\, d^3x\, \mathcal{L}'}$$

$$= \int \mathcal{D}[\psi^\dagger,\psi]\, e^{i\int dt\, d^3x\, \mathcal{L}}$$ → 元の作用に戻る.

平均場近似 $\phi(x) = \phi_0$ (const.)

$\uparrow$ gap 方程式

Ω (grand potential density) を最小化

$$\mathcal{L}'\big|_{\text{平均場}} = \psi_\sigma^\dagger \left(i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu\right)\psi_\sigma - \frac{\phi_0^2}{g} + \psi_\uparrow^\dagger \psi_\downarrow^\dagger \phi_0 + \phi_0 \psi_\downarrow \psi_\uparrow$$

$$= \underbrace{(\psi_\uparrow^\dagger \ \psi_\downarrow)}_{\Psi^\dagger} \underbrace{\begin{pmatrix} i\partial_t + \frac{\nabla^2}{2m} + \mu & \phi_0 \\ \phi_0 & +i\partial_t - \frac{\nabla^2}{2m} - \mu \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Nambu-Gorkov} \\ \text{propagator } G_0^{-1}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \psi_\uparrow \\ \psi_\downarrow^\dagger \end{pmatrix}}_{\Psi} - \frac{\phi_0^2}{g}$$

$$Z = e^{-iV\Omega} = \int \mathcal{D}[\Psi^\dagger, \Psi]\, e^{i\int d^4x\, \mathcal{L}'|_{\text{平均場}}}$$

$$= \mathrm{Det}\, G_0^{-1}\, e^{-iV\frac{\phi_0^2}{g}}$$

$$\therefore \Omega = \frac{\phi_0^2}{g} + \frac{i}{V} \underbrace{\mathrm{Log\,Det}}_{\mathrm{Tr\,Log}}\, G_0^{-1}$$

$$= \frac{\phi_0^2}{g} + i\int \frac{dp_0\, d\vec{p}}{(2\pi)^4}\, \mathrm{tr}\log \begin{pmatrix} p_0 - \varepsilon_p + \mu & \phi_0 \\ \phi_0 & p_0 + \varepsilon_p - \mu \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\phi_0^2}{g} - \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \left[E_p - (\epsilon_p - \mu) \right] \Big|_{E_p = \sqrt{(\epsilon_p-\mu)^2+\phi_0^2}}$$

・gap 方程式 $\frac{\partial \Omega}{\partial \phi_0} = 0$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{g} = \int^{\Lambda} \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_p} \qquad (E_p \xrightarrow[p\to\infty]{} \epsilon_p)$$

$$= \int^{\Lambda} \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\epsilon_p} + \int^{\Lambda} \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{2E_p} - \frac{1}{2\epsilon_p} \right)$$

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\frac{1}{g} - \int^{\Lambda} \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \frac{m}{p^2}}_{-\frac{m}{4\pi a}} = \underbrace{\int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \left(\frac{1}{2E_p} - \frac{1}{2\epsilon_p} \right)}_{\text{収束}:\ \Lambda\to\infty}$$

・粒子数固定 $\frac{\partial \Omega}{\partial \mu} = -n$

$$\Longleftrightarrow n = \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \left(-\frac{2(\epsilon_p-\mu)}{2E_p} + 1 \right)$$

$$= \int \frac{d\vec{p}}{(2\pi)^3} \left(1 - \frac{\epsilon_p-\mu}{E_p} \right)$$

gap方程式 + 粒子数一定

$$
\begin{cases}
\dfrac{m}{4\pi a} = \displaystyle\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(\frac{1}{2\varepsilon_p} - \frac{1}{2E_p}\right) \\[2ex]
n = \displaystyle\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\left(1 - \frac{\varepsilon_p - \mu}{E_p}\right) = \frac{k_F^3}{3\pi^2}
\end{cases}
$$

⇒ a と k_F が与えられたとき、μ と ϕ_0 が決定

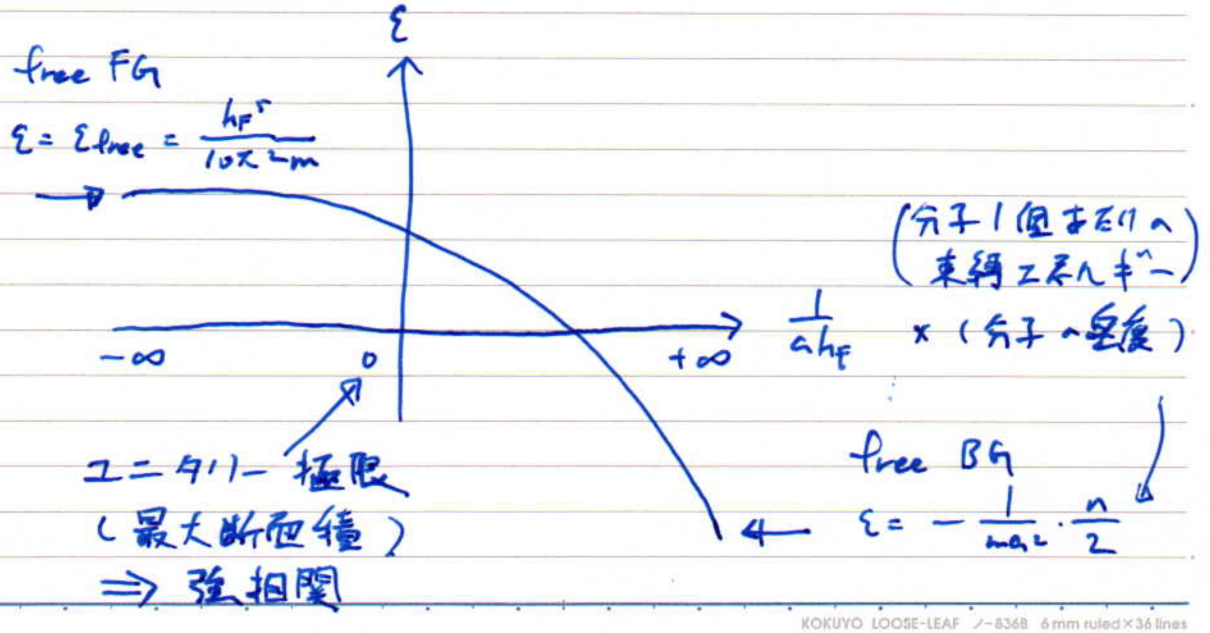
⇒ Ω が決定

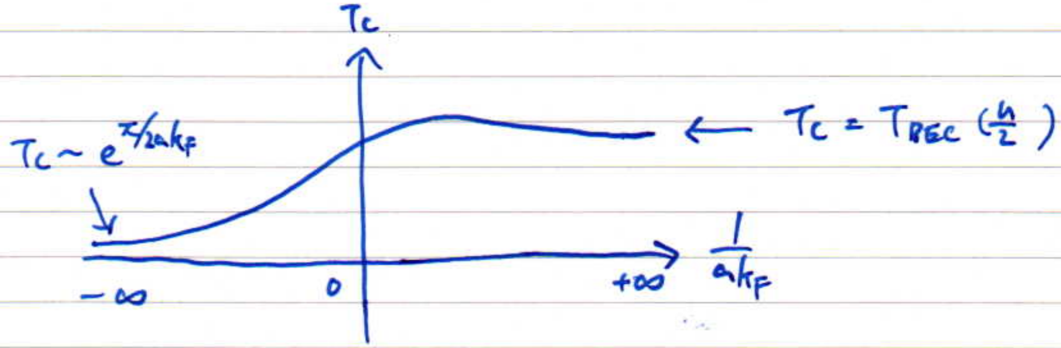
⇒ 圧力 $p = -\Omega$

エネルギー密度 $\varepsilon = \Omega + \mu n$

化学ポテンシャル $\mu = \dfrac{\partial \varepsilon}{\partial n}$

音速 $c_s^2 = \dfrac{1}{m}\dfrac{\partial p}{\partial n}$





平均場 + ガウス揺らぎ

エネルギー密度

$$\varepsilon = \xi\left(\frac{1}{ak_F}\right)\underbrace{\varepsilon_{free}}_{=\frac{k_F^5}{10\pi^2 m}}$$

$$\downarrow$$

引力によるエネルギー利得

特に、$a \to \infty$ のとき、$\xi\left(\frac{1}{ak_F} \to 0\right) = \xi_0$ は定数なので

$$\mu = \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} = \xi_0 \cdot \underbrace{\varepsilon_F}_{=\frac{k_F^2}{2m}}$$

$$P = \mu n - \varepsilon = \xi_0 \cdot P_{free} \ / = \frac{k_F^5}{15\pi^2 m}$$

$$c_s^2 = \xi_0 \cdot c_{s,free}^2 \ / \ \frac{v_F^2}{3}$$

ユニタリー極限における基本的熱力学量 ξ_0
を決定したい!

- 平均場近似 $\xi_0 = 0.59$
- モンテ・カルロ・計算 $\xi_0 = 0.372(5)$ [1]
  $\xi_0 = 0.366^{+0.016}_{-0.011}$ [2]
- 実験 $\xi_0 = 0.370(5)(8)$ [3, 4]

[1] 〃 1107.5848
[2] arXiv: 1203.3169
[3] 〃 1110.3309
[4] 〃 1211.1512