量子力学演習第二　第 1 回

担当：横山（本館 296）

2014 年 4 月 11 日

量子力学演習第二について

- この演習では、講義「量子力学第二」の内容に関する問題を解き、計算力を身につけ、量子力学の理解を深めることを目的とします。
- 演習で使うプリントは配布しますが、以下のサイトにも置くことにします。

  http://www.stat.phys.titech.ac.jp/~yokoyama/qm2/qm2.html

  また、A クラスの問題は以下のサイトにあります。B クラスでは扱いませんが是非解いてみてください。

  http://www.stat.phys.titech.ac.jp/~ktaka/14qm2/

  ただし、これらの問題のファイルの無断転載・配布を禁止します。

演習の進め方

- 毎回問題を配るので全て解くこと。一部の問題をレポートとして提出してもらう場合があります。
- 問題は担当者を決めて黒板で発表してもらいます。
- 最後に試験を行います。成績はテスト、レポート、発表の合計で評価します。

問題 1　《3 次元調和振動子》

z 方向に一様な電場がかかった 3 次元調和振動子は以下のハミルトニアンであらわされる。この系のエネルギー固有値を直交座標を用いて求めよ。1 次元調和振動子の結果を用いてよい（以下の問題でも同様）。

$$H = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2 r^2 + eEz. \tag{1}$$

また、この振動子の分極率は以下で与えられる（$-e\langle z\rangle$ が分極）。以下の値を求めよ。

$$\lim_{E\to 0}\frac{-e\langle z\rangle}{E}. \tag{2}$$

問題 2　《2 次元調和振動子》

以下の 2 次元系のハミルトニアンを考える。

$$H = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 + V,\ V = m\omega^2(x^2+xy+y^2) = \frac{1}{2}m\omega^2 \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}. \tag{3}$$

(i) 適当な直行変換 U を用いてポテンシャルの 2 次形式を標準形に（行列を対角化）せよ。
(ii) U により次のように座標変換したとき

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = {}^tU\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = {}^tU\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} \tag{4}$$

$[x_i, p_j] = i\hbar\delta_{ij}$ が成り立つことを示し、ハミルトニアンの固有値、固有関数を求めよ。

（裏に続く）

問題 3　《2 次元調和振動子》
2 次元調和振動子のハミルトニアンの固有状態を極座標を用いて求める。ハミルトニアンは変数分離して、以下の形になる。m は整数とする。

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\left(\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{dR}{dr}-\frac{m^2}{r^2}R\right)+\frac{1}{2}M\omega^2r^2R=ER, \tag{5}$$

$\xi=r/a, E=\hbar\omega\varepsilon/2, a=\sqrt{\hbar/M\omega}$ と変数変換すると

$$\frac{d^2R}{d\xi^2}+\frac{1}{\xi}\frac{dR}{d\xi}+\left(\varepsilon-\xi^2-\frac{m^2}{\xi^2}\right)R=0 \tag{6}$$

となりさらに $R(\xi)=f(\xi)e^{-\xi^2/2}$ とおくと以下のようになる。

$$\frac{d^2f}{d\xi^2}+\left(-2\xi+\frac{1}{\xi}\right)\frac{df}{d\xi}+\left(\varepsilon-2-\frac{m^2}{\xi^2}\right)f=0. \tag{7}$$

この方程式を級数展開の方法で解け。また、級数が有限項で打ち切られることからエネルギー固有値を求めよ。さらに $f(\xi)=\xi^{|m|}u(\xi), \zeta=\xi^2$ と変換し、u の満たす方程式を導き固有関数を Laguerre 陪多項式で表せ。

問題 4　《磁場中の電子》
(i) 演算子 A, B, C について以下の式が成り立つことを示せ。

$$[AB,C]=A[B,C]+[A,C]B,\ [A,BC]=B[A,C]+[A,B]C. \tag{8}$$

(ii) $\nabla\cdot\mathbf{A}=0$ が成り立つとき（Coulomb ゲージと呼ばれる）、次の式が成り立つことを示せ。

$$\mathbf{p}\cdot\mathbf{A}=\mathbf{A}\cdot\mathbf{p}. \tag{9}$$

(iii) 演算子 A の時間微分を次のように定義する：$\dot{A}=1/(i\hbar)[A,H]$。このときハミルトニアン $H=\frac{1}{2m}(\mathbf{p}+e\mathbf{A})^2+V$ に対して速度演算子 $\mathbf{v}$ が以下のようにかけることを示せ ($e>0$)。

$$\mathbf{v}=\dot{\mathbf{r}}=\frac{1}{m}(\mathbf{p}+e\mathbf{A}). \tag{10}$$

さらに以下の式が成り立つことを示せ。

$$[v_i,v_j]=-i\frac{e\hbar}{m^2}\varepsilon_{ijk}B_k. \tag{11}$$

(iv) ベクトルポテンシャルの存在下での流れの密度を次のように定義する：

$$\mathbf{j}=\mathrm{Re}[\psi^*\mathbf{v}\psi]=\frac{1}{m}\mathrm{Re}[\psi^*\mathbf{p}\psi]+\frac{e}{m}\mathbf{A}|\psi|^2. \tag{12}$$

このとき確率密度 $\rho=|\psi|^2$ に対して流れの保存則が成り立つことを示せ。

（以上）