量子力学演習第二　第10回

担当：横山（本館296）

2014年6月20日

これまでの補充問題あるいはAクラスの問題（類似の問題を除く）から5題選んでレポートとして、次回の授業時に提出してください。

問題1　《角運動量、球面調和関数》
次の波動関数で表される状態を考える。

$$\psi = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\frac{2z^2 - x^2 - y^2}{r^2} + \sqrt{\frac{3}{\pi}}\frac{xz}{r^2}. \tag{1}$$

(i) $\mathbf{L}^2\psi, L_z\psi$ を計算せよ。波動関数を球面調和関数で表すとよい。
(ii) $L_+\psi, \langle\psi| L_+ |\psi\rangle$ を計算せよ。
(iii) L_z の測定値が $\hbar, 0, -\hbar$ になる確率をそれぞれ求めよ。
(iv) 粒子が角度 $\theta = \pi/3$、$\phi = \pi/2$ の方向の幅 $\Delta\theta = \Delta\phi = 0.03$ の範囲に存在する確率を求めよ。

問題2　《3つのスピン角運動量の合成》
３つのスピン1/2の角運動量 $\mathbf{S}_i, i = 1, 2, 3$ を合成せよ。まず、2つのスピン角運動量を $\mathbf{S}_{12} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$ のように合成し、次に $\mathbf{S} = \mathbf{S}_{12} + \mathbf{S}_3$ のように $\mathbf{S}_{12}$ と $\mathbf{S}_3$ を合成せよ。2つのスピン1/2のスピン角運動量の合成については前回の結果を用いてよい。

問題3　《スピン系》
(i) ３つのスピン1/2の粒子 $\mathbf{S}_i, i = 1, 2, 3$ からなる系が以下のハミルトニアンに従うとき、固有値とその縮退度を求めよ。

$$H = A\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2/\hbar^2 + B(\mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2) \cdot \mathbf{S}_3/\hbar^2. \tag{2}$$

(ii) 2つのスピン1/2の粒子からなる系が以下のハミルトニアンに従うとき、固有値とその縮退度を求めよ。

$$H = -4J(s_{1x}s_{2x} + s_{1y}s_{2y})/\hbar^2. \tag{3}$$

（裏に続く）

問題 4　《光学遷移の選択則》
z 方向に伝播する円偏光による光学遷移の選択則を考える。このとき電場は以下で与えられ

$$\mathbf{E} = \frac{E_0}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{e}_x \cos\omega t \pm \mathbf{e}_y \sin\omega t\right) \tag{4}$$

$\pm$ は左回り、右回り偏光に対応する。このときの選択則を求めよ。球面調和関数の積についての次の加法定理を用いてよい。

$$Y_{10}Y_{lm} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}\frac{(l+1+m)(l+1-m)}{(2l+1)(2l+3)}}Y_{l+1m} + \sqrt{\frac{3}{4\pi}\frac{(l+m)(l-m)}{(2l+1)(2l+3)}}Y_{l-1m}, \tag{5}$$

$$Y_{1\pm1}Y_{lm} = \sqrt{\frac{3}{8\pi}\frac{(l+1\pm m)(l+2\pm m)}{(2l+1)(2l+3)}}Y_{l+1m\pm1} - \sqrt{\frac{3}{8\pi}\frac{(l\mp m)(l\mp m-1)}{(2l+1)(2l-1)}}Y_{l-1m\pm1}. \tag{6}$$

この結果により、円偏光の光子が固有の s_z を持つと解釈できる。

問題 5　《補充問題（角運動量の Schwinger-boson 表示）》
角運動量を 2 種類のボゾン (a, b) の生成消滅演算子で表示することを考える。これらはボゾンの交換関係を満たすとする：$\left[a, a^\dagger\right] = \left[b, b^\dagger\right] = 1$。角運動量演算子を以下のように定義する

$$J_+ = J_x + iJ_y = a^\dagger b, \tag{7}$$

$$J_- = J_x - iJ_y = b^\dagger a, \tag{8}$$

$$J_z = \frac{1}{2}(a^\dagger a - b^\dagger b), \tag{9}$$

$$J = \frac{1}{2}(a^\dagger a + b^\dagger b). \tag{10}$$

(i) このとき角運動量の交換関係 $\left[J_i, J_j\right] = i\varepsilon_{ijk}J_k$, $\left[J_z, J_\pm\right] = \pm J_\pm$ が成り立つことを示せ。また、$\mathbf{J}^2 = J(J+1)$ となることを示せ。
(ii) J の固有値を j、J_z の固有値を m、$a^\dagger a$ の固有値を N_a、$b^\dagger b$ の固有値を N_b とすると $m = (N_a - N_b)/2, j = (N_a + N_b)/2$ となり、角運動量をボゾンの数で表示できることがわかる。ボゾンはスピン 1/2 であり、a, b あわせて $2j$ 個のボゾンがあると解釈できる。よって量子数 j, m の状態は次のように書ける

$$|jm\rangle = \frac{1}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}(a^\dagger)^{j+m}(b^\dagger)^{j-m}|0\rangle. \tag{11}$$

ボゾンの交換関係を用いて次の式が成り立つことを示せ

$$J_\pm |jm\rangle = \sqrt{(j\mp m)(j\pm m+1)}\,|jm\pm1\rangle. \tag{12}$$

問題 6　《補充問題》
２粒子からなる系の以下の波動関数を考える。

$$\psi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = f(r_1^2)g(r_2^2)\left[\alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}_1)(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}_2) + \beta(\mathbf{b}\cdot\mathbf{r}_1)(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}_2) + \gamma(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{r}_1\cdot\mathbf{r}_2)\right] \tag{13}$$

ここで $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ は任意のベクトル、f, g は任意の関数、α, β, γ は定数とする。
(i) $\mathbf{L}_1^2\psi, \mathbf{L}_2^2\psi$ を計算せよ。
(ii) ψ が全角運動量の 2 乗 $\mathbf{J}^2 = (\mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2)^2$ の固有関数になるような α, β, γ を与えよ。

（以上）