

量子力学演習第二 第11回

担当：横山（本館 296）

2014年6月27日

問題1 《散乱振幅と微分断面積》

入射波 $\psi_{in} = \frac{e^{ikz}}{(2\pi)^{3/2}}$ および散乱波 $\psi_{sc} = \frac{f(\theta)e^{ikr}}{(2\pi)^{3/2}r}$ に対して確率の流れ密度を計算せよ。また

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta)|^2 \quad (1)$$

が成り立つことを示せ。

問題2 《Born 近似》

Born 近似で散乱振幅は次のようにかける

$$f(\theta) = -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \int V(r)e^{-i\mathbf{q}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (2)$$

この時、次のポテンシャルについて Born 近似で微分断面積を求めよ。(a) $V(r) = \alpha\delta(r-R)$, (b) $V(r) = V_0\theta(R-r)$, (c) $V(r) = V_0e^{-r/R}$, (d) $V(r) = \alpha/r^2$, (e) $V(r) = V_0e^{-(r/R)^2}$.

問題3 《Born 近似の適用条件》

波動関数 ψ を次のように展開する。 G_0 は Green 関数とする。

$$\psi = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[e^{ikz} + \frac{2m}{\hbar^2} \int G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')V(\mathbf{r}')e^{ikz'} d\mathbf{r}' + \dots \right]. \quad (3)$$

今、

$$\left| \frac{2m}{\hbar^2} \int G_0(\mathbf{r}-\mathbf{r}')V(\mathbf{r}')e^{ikz'} d\mathbf{r}' \right| \ll 1 \quad (4)$$

が成り立てば Born 近似がよい近似となる。 $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ かつ $V(r) = V_0\theta(a-r)$ のとき、この条件を具体的に計算せよ。また、 $ka \gg 1, ka \ll 1$ の極限での条件を求めよ。

(裏に続く)

問題 4 《Rayleigh の公式》
 $e^{ikr \cos \theta}$ を次のように展開するとき

$$e^{ikr \cos \theta} = \sum_{l=0}^{\infty} c_l j_l(kr) P_l(\cos \theta) \quad (5)$$

$c_l = (2l+1)i^l$ であることを示せ (Rayleigh の公式)。両辺の $(kr \cos \theta)^l$ の係数を比較するとよい。

問題 5 《補充問題 (2つの散乱体)》

Born 近似をもちいて、2つの同じ散乱体が距離 \mathbf{a} だけ離れている場合、つまりポテンシャルが $V(\mathbf{r}) = V_0(r) + V_0(|\mathbf{r} - \mathbf{a}|)$ と書けるときの散乱振幅を、ポテンシャルが $V(\mathbf{r}) = V_0(r)$ のときの散乱振幅 f_0 を用いて表せ。微分断面積を計算し、 \mathbf{a} の方向平均をとれ。

問題 6 《補充問題 (磁場による荷電粒子の散乱)》

Born 近似をもちいて、磁場による荷電粒子の散乱振幅を計算せよ。また、ゲージ不変性を示せ。

問題 7 《補充問題 (2つのポテンシャルによる散乱)》

Born 近似をもちいて、 z 軸にそって入射してきた粒子の次のポテンシャルによる散乱振幅と全断面積を求めよ： $V(\mathbf{r}) = V_0\delta(\mathbf{r} - a\hat{z}) + V_0\delta(\mathbf{r} + a\hat{z})$ 。 \hat{z} は z 軸方向の単位ベクトルとする。

問題 8 《補充問題 (散乱振幅と全断面積)》

s 波状態について、以下のポテンシャルによる散乱振幅と全断面積を求めよ：

$$V(r) = -\frac{\hbar^2}{ma^2} \frac{1}{\cosh^2(r/a)}. \quad (6)$$

問題 9 《補充問題 (全断面積)》

次のポテンシャルによる散乱を考える： $V(r) = -V_0\theta(a-r)$ 。このとき全断面積がゼロエネルギー $E = 0$ でゼロになる条件を求めよ。また、この条件が満たされるとき $E \rightarrow 0$ の極限で $\frac{d\sigma}{d\Omega} \rightarrow E^\lambda$ とかけるとき λ を求めよ。ゼロエネルギー極限では s 波の寄与が支配的になることに注意せよ。

問題 10 《補充問題 (スピンに依存するポテンシャルによる散乱)》

Born 近似を用いて、次のポテンシャルについての微分断面積を求めよ。ポテンシャルは中性子 (スピン 1/2) 間の散乱を表すものとし、スピントリプレットの状態に対してゼロでシングレット状態のとき

$$V(r) = V_0 \frac{e^{-\mu r}}{r} \quad (7)$$

であり、中性子のスピンの向きはランダムとする。

(以上)