量子力学演習第二　第12回

担当：横山（本館 296）

2014 年 7 月 4 日

問題 1　《光学定理》
散乱振幅を次のように部分波展開する。

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{k} e^{i\delta_l} \sin\delta_l P_l(\cos\theta). \tag{1}$$

この式を用いて次の光学定理が成り立つことを示せ。

$$\sigma = \frac{4\pi}{k} \mathrm{Im} f(0). \tag{2}$$

さらに流れの保存則より定常状態で流れの密度を十分大きな球面上で積分すると 0 になる。次の波動関数の流れの密度を十分大きな球面上で積分することにより光学定理が成り立つことを示せ。

$$\psi = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[e^{ikz} + \frac{f(\theta)}{r} e^{ikr} \right]. \tag{3}$$

問題 2　《位相のずれと全断面積》
次のポテンシャル

$$V(r) = V_0 \theta(a-r) \tag{4}$$

による散乱について s 波状態について低エネルギー極限での位相のずれを計算し、全断面積を求めよ。

問題 3　《位相のずれと全断面積》
次のポテンシャル

$$V(r) = \left\{ \begin{array}{ll} \infty, & r < a \\ 0, & r > a \end{array} \right. , \tag{5}$$

による散乱について l 波状態について位相のずれを計算せよ。また、低エネルギー極限および高エネルギー極限での全断面積を求めよ。

（裏に続く）

問題 4　《位相のずれ》
動径方向の波動関数 R を $R = f/r$ と置くときポテンシャル V による散乱ついて、位相のずれが次のように表せることを示せ：

$$\sin\delta_l = -\frac{2m}{\hbar^2}\int_0^\infty V(r)f(r)rj_l(kr)dr. \tag{6}$$

ここで $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}$ である。特に、Born 近似を用いて

$$\delta_l = -\frac{2mk}{\hbar^2}\int_0^\infty V(r)\left[rj_l(kr)\right]^2 dr \tag{7}$$

であることを示せ。さらに $k \to 0$ 極限での k 依存性を調べよ。

問題 5　《補充問題（位相のずれ）》
ポテンシャル $V(r) = \alpha/r^2$, $\alpha > 0$ について位相のずれを計算せよ。また、次の場合の散乱振幅を計算せよ。(a) $m\alpha/\hbar^2 \ll 1$、(b) $m\alpha/\hbar^2 \gg 1$ かつ後方散乱 ($\theta = \pi$)。

問題 6　《補充問題（位相のずれ）》
s 波散乱の位相のずれが次のように与えられるとき、対応するポテンシャルを求めよ。ただし、位相のずれは十分に小さいと仮定する。(a) $\delta_0(k) = c$ (const.), (b) $\delta_0(k) = \frac{\alpha k}{1+\beta k^2}$ ($\beta > 0$).

問題 7　《補充問題（Born 近似と光学定理）》
Born 近似を用いて、湯川ポテンシャルに対する散乱振幅を計算し、この近似の下では光学定理が成り立たないことを示せ。

問題 8　《補充問題（2 次元における散乱理論）》
軸対称なポテンシャル中の 2 次元量子系における散乱理論を展開せよ。この系における光学定理を導出せよ。

（以上）