量子力学演習第二　第13回

担当：横山（本館 296）

2014 年 7 月 11 日

問題 6 をレポート問題にします。7/25 の授業時に提出してください。
テストを 8/1 の 13:20–14:50、H113 で行います。

問題 1　《微分断面積》
(i) 水素原子中の陽子を点電荷としたときのポテンシャルは次のようにかける：

$$V(r) = -\frac{e^2}{r}. \tag{1}$$

このポテンシャルに対する微分断面積 $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0$ を Born 近似を用いて求めよ。
(ii) 水素原子が $\rho(\mathbf{r})$ のように空間分布しているとする。このとき Born 近似を用いて微分断面積を計算し、微分断面積が次のようにかけることをしめせ：

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 |\tilde{\rho}(\mathbf{q})|^2. \tag{2}$$

ただし、$\tilde{\rho}(\mathbf{q})$ は $\rho(\mathbf{r})$ の Fourier 変換とする。

問題 2　《位相のずれ》
次のポテンシャルの散乱による s 波の位相のずれを求めよ。また、$\gamma \to \infty$ のときの位相のずれを求めよ。

$$V(r) = \frac{\hbar^2\gamma}{2m}\delta(r-a). \tag{3}$$

問題 3　《束縛状態と S 行列の極》
次の引力の井戸型ポテンシャルについて

$$V(r) = -V_0\theta(a-r) \tag{4}$$

s 波の束縛状態のエネルギーを決める式を求めよ。次に散乱状態を考え、S 行列の分母のゼロ点を決める式を求めよ。

（裏に続く）

問題 4　《非弾性散乱》
非弾性散乱が起こる場合、波の吸収により一般に S 行列 $S_l = e^{2i\delta_l}$ の絶対値は 1 より小さくなる。散乱振幅を次のように展開するとき

$$f(\theta) = \frac{1}{2ik}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(S_l - 1)P_l(\cos\theta) \tag{5}$$

弾性散乱による断面積 σ_{el} および非弾性散乱による断面積 σ_{inel} が次のようにかけることを示せ：

$$\sigma_{el} = \frac{\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)\,|1 - S_l|^2, \tag{6}$$

$$\sigma_{inel} = \frac{\pi}{k^2}\sum_{l=0}^{\infty}(2l+1)(1 - |S_l|^2). \tag{7}$$

$S_l = 0$ のとき完全吸収と呼ぶ。半径 R の完全吸収体に粒子が衝突するとき σ_{el} および σ_{inel} を半古典的に計算し、全断面積を求めよ。ただし、$kR \gg 1$ とする。

問題 5　《スピンに依存する散乱》
以下のスピンに依存するポテンシャル $V(x)$ による 1 次元の電子の散乱（トンネル効果）を考える。

$$V(x) = \begin{cases} V_0\sigma_0 + H\sigma_z, & 0 < x < L \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}. \tag{8}$$

E をエネルギーとして $V_0, H, E, V_0 - H - E > 0$ と仮定する。この時ハミルトニアンはスピンについて対角化されているのでそれぞれのスピンについて独立に解ける。この時、それぞれのスピンについての確率の流れ $j_\uparrow, j_\downarrow$ を計算せよ。$V_0 - H - E \to 0$ のときのそれぞれの表式を求め、L の関数としてその概形を図示せよ。スピン分解した確率の流れの差 $j_\uparrow - j_\downarrow$ はスピン流と呼ばれる。また、このようなスピンに依存するポテンシャル障壁が 2 つ並んだとき、“磁場”の方向（H の符号）が平行のときと反平行のときに、予想される全体のコンダクタンスの違いを述べよ。

問題 6　《レポート問題（Coulomb 散乱）》
Coulomb 力による散乱を考える。Coulomb 相互作用している Ze と $Z'e$ の電荷をもつ 2 粒子の相対座標に関する Schrödinger 方程式は

$$\left(\Delta + k^2 - \frac{2\gamma k}{r}\right)\psi = 0 \tag{9}$$

となる。ここで $E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}, \gamma = \frac{ZZ'e^2 m}{\hbar^2 k}$ である。このとき Coulomb 散乱について散乱振幅を計算し、微分断面積を求めよ。

（以上）