量子力学演習第二　第2回

担当：横山（本館296）

2014年4月11日

問題1　《3次元ポテンシャル中の電子》
以下の3次元ポテンシャルに閉じ込められた粒子のハミルトニアンの固有値、固有関数を求めよ。

$$V = \begin{cases} \frac{1}{2}m\omega^2 z^2, & 0 < x < a, 0 < y < a, \\ \infty, & \text{elsewhere} \end{cases} \tag{1}$$

また、$\hbar\omega > 3\pi^2\hbar^2/(2ma^2)$ が成り立つとき、基底状態と第一励起状態のエネルギーと縮退度を求めよ。

問題2　《磁場下の自由電子》
2次元系 ($x-y$ 平面にとる) に z 方向に磁場がかかった系を考える。$\mathbf{A} = (-By, 0, 0)$ ととるときSchrödinger 方程式は以下のようにかける。

$$\frac{1}{2m}\left[\left(-i\hbar\frac{\partial}{\partial x} - eBy\right)^2 - \hbar^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right]\psi = E\psi. \tag{2}$$

この方程式の固有値を求めよ。またポテンシャル $V = \frac{1}{2}m\omega^2 y^2$ が加わったときの固有値も求めよ。

問題3　《磁場下の2次元調和振動子》
2次元系 ($x-y$ 平面にとる) においてポテンシャル $V = \frac{1}{2}M\omega^2 r^2$ に電子が束縛されている系を考える。z 方向に磁場がかかっており、$\mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{B}\times\mathbf{r})$ ととる。このとき $\nabla\cdot\mathbf{A} = 0$ を示し、

$$(\mathbf{p} + e\mathbf{A})^2 = \mathbf{p}^2 + eBL_z + \frac{1}{4}(eBr)^2 \tag{3}$$

が成り立つことを示せ。
次に変数分離 $\psi = R(r)e^{im\phi}$ を行うと Schrödinger 方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\left(\frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} - \frac{m^2}{r^2}R\right) + \frac{1}{2}M\left[\omega^2 + \left(\frac{\omega_c}{2}\right)^2\right]r^2 R = \left(E - \frac{\hbar\omega_c}{2}m\right)R, \tag{4}$$

$\omega_c = eB/M$ となることを示せ。これより、この系のエネルギー固有値を求めよ。必要であれば前回の問題の結果を用いてよい。

（裏に続く）

問題 4　《交換関係》
(i) 演算子 A, B に対して以下の式が成り立つことを示せ。

$$[A, B^n] = \sum_{i=0}^{n-1} B^i \,[A, B]\, B^{n-i-1},\ [A^n, B] = \sum_{i=0}^{n-1} A^{n-i-1}\,[A, B] A^i. \tag{5}$$

また、$[A, B] = 1$ のとき $[A, f(B)] = f'(B)$ を示せ（$f(B)$ は B の関数）。$\left[A^2, B^2\right]$ を計算せよ。
(ii) 演算子 A, B に対して以下の Campbell-Baker-Hausdorff 公式が成り立つことを示せ。

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2}\,[A, [A, B]] + ... \tag{6}$$

これを用いて $e^{iap/\hbar} x e^{-iap/\hbar}$ を計算せよ。a は実数とする。
また、$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0$ のとき以下の式が成り立つことを示せ。

$$e^A e^B = \exp\left[A + B + \frac{1}{2}\,[A, B]\right]. \tag{7}$$

これを用いて $[A, B] = 1$ のとき $e^{cA} e^{c^* B}$ を 1 つの因子にまとめよ（c は複素数）。一般に以下の展開式が知られている。

$$e^A e^B = \exp\left[A + B + \frac{1}{2}\,[A, B] + \frac{1}{12}\,[A - B, [A, B]] + ...\right]. \tag{8}$$

（以上）