量子力学演習第二　第3回

担当：横山（本館 296）

2014 年 4 月 25 日

問題 1　《3 次元調和振動子》
3 次元調和振動子を考える。動径方向の波動関数 R を $R(r) = r^{-1}U(r)$ とおくと Schrödinger 方程式は

$$-\frac{\hbar^2}{2M}\frac{d^2U}{dr^2} + \left(\frac{1}{2}M\omega^2r^2 + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2Mr^2}\right)U = EU \tag{1}$$

となる。このとき、$r \to 0, \infty$ での振る舞いから、$U(r) = f(r)r^{l+1}e^{-M\omega r^2/2\hbar}$ とおくとよいことを示せ。また $f(r)$ が満たす方程式を導き、級数展開の方法で解け。級数が有限項で打ち切られるという条件から、エネルギー固有値を求めよ（当然期待される値になる）。

問題 2　《3 次元の束縛状態》
以下の 3 次元ポテンシャルに従う粒子のエネルギー固有値を求めよ。

$$V = A(x^2 + y^2 + 2\lambda xy) + B(z^2 + 2\mu z). \tag{2}$$

ただし、$A, B > 0, |\lambda| < 1,$ μ は任意の実数とする。$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y), v = \frac{1}{\sqrt{2}}(x-y)$ などとおくとよい。

問題 3　《演算子の級数展開》
(i) 演算子 A, B に対して λ を小さいパラメータとして次の演算子を λ で展開せよ: $[A - \lambda B]^{-1}$.
(ii)I を空間反転演算子、a を実数とするとき次の演算子を計算せよ: $\exp(iaI)$.
(iii)a を実数とし、g を x の関数とするとき以下の演算子を x の関数 $f(x)$ に作用させた結果を求めよ。

$$\exp\left(a\frac{d}{dx}\right),\ \exp\left(ax\frac{d}{dx}\right),\ \exp\left(g(x)\frac{d}{dx}\right). \tag{3}$$

問題 4　《交換関係》
角運動量演算子 l_i（$\hbar\mathbf{l} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$）についての以下の交換関係を計算せよ。
(i)

$$[l_i, x_j]\,,\ [l_i, p_j]\,. \tag{4}$$

(ii)

$$\left[l_i, \mathbf{r}^2\right],\ \left[l_i, \mathbf{p}^2\right],\ [l_i, \mathbf{p}\cdot\mathbf{r}]\,,\ \left[l_i, (\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})^2\right]. \tag{5}$$

(iii)

$$[l_i, (\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})p_k]\,,\ [l_i, (\mathbf{p}\cdot\mathbf{r})x_k]\,. \tag{6}$$

(iv)

$$[l_i, x_kx_l]\,,\ [l_i, p_kp_l]\,,\ [l_i, x_kp_l]\,. \tag{7}$$

（裏に続く）

問題 5　《補充問題（4 次元調和振動子）》
4 次元調和振動子を考える。4 次元極座標系を $x = r\sin\alpha\sin\theta\cos\phi,\ y = r\sin\alpha\sin\theta\sin\phi,\ z = r\sin\alpha\cos\theta,\ w = r\cos\alpha$ と表し、4 次元極座標系におけるラプラシアンの表式をもとめよ（物理数学演習第二 A 第 12 回の問題も参考になるかも知れない）。波動関数 ψ を $\psi = f(r)g(\alpha)Y_{lm}(\theta,\phi)$ のように変数分離した時、f, g の満たす方程式を求めよ。また、$l = 0$ のとき、g が有限項の多項式になる条件を求め、g を求めよ。さらに f の満たす方程式を解き、エネルギー固有値を求めよ。

問題 6　《補充問題》
問題 1 で $x = M\omega r^2/\hbar$ と変数変換すると合流型超幾何関数で f を表現できる。確認してみよ。合流型超幾何関数が多項式になるという条件からエネルギーが決まる。

問題 7　《補充問題（ゲージ変換）》
スカラーポテンシャルとベクトルポテンシャル及び、時間微分と空間微分をまとめて、4 元共変ベクトルで次のように書く：$A_\mu = (\phi, -\mathbf{A}), \partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \nabla\right)$。このときゲージ変換は $A_\mu \to A_\mu + \partial_\mu \lambda$ とかける。$\mu = 0, 1, 2, 3$ とする。
(i) $D_\mu = \partial_\mu - i\frac{e}{\hbar}A_\mu$ とするとゲージ変換に対して D_μ が以下のように変換されることを示せ：

$$D_\mu \to \exp\left(i\frac{e}{\hbar}\lambda\right) D_\mu \exp\left(-i\frac{e}{\hbar}\lambda\right). \tag{8}$$

(ii) Schrödinger 方程式を以下のように表示しゲージ変換で不変であることを示せ：

$$\left(i\hbar D_0 + \frac{\hbar^2}{2m}D_i^2\right)\psi = 0. \tag{9}$$

(iii) D_μ の交換子を次のように書くとき、$F_{\mu\nu}$ を電場と磁場で表せ：

$$[D_\mu, D_\nu] = -i\frac{e}{\hbar}F_{\mu\nu}. \tag{10}$$

問題 8　《補充問題（磁場中の電子）》
z 方向に一様な磁場 B がかかった 2 次元系を考える。ハミルトニアンは次のように書ける：

$$H = \frac{1}{2m}\left[(p_x + eA_x)^2 + (p_y + eA_y)^2\right]. \tag{11}$$

このとき、以下に定義する Π_x, Π_y, X, Y の交換関係を調べ、ハミルトニアンの固有値を求めよ：

$$\Pi_x = p_x + eA_x,\ \Pi_y = p_y + eA_y,\ X = x - \frac{1}{eB}\Pi_y,\ Y = y + \frac{1}{eB}\Pi_x. \tag{12}$$

問題 9　《補充問題（電磁場中の電子）》
z 方向に一様な磁場 B、x 方向に一様な電場 E がかかった 2 次元系（xy 平面とする）を考える。
(i) 以下のようにゲージを選び、ハミルトニアンの固有値をもとめよ：

$$A_x = 0,\ A_y = Bx,\ A_z = 0,\ \phi = -Ex. \tag{13}$$

(ii) 固有状態のもつ電荷密度 ρ と電流密度 $\mathbf{j}$ を求めよ。
(iii) ρ と $\mathbf{j}$ の以下の空間積分の比を求めよ：

$$\frac{\int \mathbf{j}dxdy}{\int \rho dxdy}. \tag{14}$$

（以上）