量子力学演習第二　第4回

担当：横山（本館 296）

2014 年 5 月 2 日

講義ノートの１、２章の問題すべてをレポート問題にします。次回の授業時に提出してください。

問題 1　《3 次元の束縛状態》
以下の 3 次元引力ポテンシャルに閉じ込められた粒子のハミルトニアンの固有エネルギーを求めたい。

$$V = \begin{cases} -V_0, & r < a, \\ 0, & r > a \end{cases} \tag{1}$$

それぞれの領域での波動関数を求め、境界で接続することにより、解くべき方程式を求めよ。また、$l = 0$ のとき解の個数を議論せよ。

問題 2　《3 次元の束縛状態》
$l = 0$ の状態に対して、以下の 3 次元井戸型ポテンシャルに閉じ込められた粒子のハミルトニアンの固有エネルギーを求めよ。また、束縛状態が 1 つだけ存在するための条件を求めよ。

$$V = \begin{cases} \infty, & 0 < r < a \\ -V_0, & a < r < b \\ 0, & b < r \end{cases} \tag{2}$$

問題 3　《3 次元の束縛状態》
$l = 0$ の状態に対して、以下の 3 次元井戸型ポテンシャルに閉じ込められた粒子のハミルトニアンの固有関数とそのエネルギーを求めよ。

$$V = \begin{cases} 0, & a < r < b, \\ \infty, & \text{elsewhere} \end{cases} \tag{3}$$

問題 4　《3 次元の束縛状態》
$l = 0$ の状態について以下のポテンシャルに閉じ込められた粒子のハミルトニアンの固有エネルギーを決定する式を求めよ。
(i)

$$V(r) = -\alpha\delta(r - a). \tag{4}$$

(ii)

$$V(r) = -V_0 e^{-r/a}. \tag{5}$$

（裏に続く）

問題 5　《補充問題（Bessel 方程式に帰着できる方程式)》
いくつかの方程式は Bessel 方程式に帰着できる。Schrödinger 方程式は以下の形の方程式に帰着できる場合がある。
(a)$y = x^a J_\alpha(bx^c)$ は次の方程式の解であることを示せ。

$$x^2 y'' + (1-2a)xy' + \left[(bcx^c)^2 + a^2 - \alpha^2 c^2\right] y = 0. \tag{6}$$

(b)$y = e^{ax} J_\alpha(be^{cx})$ は次の方程式の解であることを示せ。

$$y'' - 2ay' + \left[(bce^{cx})^2 + a^2 - \alpha^2 c^2\right] y = 0. \tag{7}$$

(c) 以下の微分方程式の解を求めよ。

$$xy'' + y' + y = 0,\ xy'' - y' + xy = 0,\ y'' + xy = 0,\ y'' + e^{2x} y = 0,\ y'' + \lambda^2 x^{p-2} y = 0. \tag{8}$$

問題 6　《補充問題》
(i) 問題 4 を以下のポテンシャルの下で解け。$x = e^{-r/a}$ とおくとよい。

$$V(r) = -V_0/(e^{r/a} - 1). \tag{9}$$

(ii) 以下の球対称ポテンシャルをもつ粒子のエネルギーを 3 次元における Schrödinger 方程式を解き、求めよ。
(a)

$$V = \frac{A}{r^2} + Br^2. \tag{10}$$

ただし、$l(l+1) + 2A > 0$ とする。
(b)

$$V = De^{-2\alpha(r-r_0)} - 2De^{-\alpha(r-r_0)}. \tag{11}$$

ただし、$l = 0$ の状態を考え、$x = e^{-\alpha(r-r_0)}$ と変数変換し、$r \to \pm\infty$ で波動関数が 0 になるという境界条件の下で解け。このポテンシャルは Morse ポテンシャルと呼ばれ、２原子分子を構成する２原子間に働く力を近似的に表す。
(iii) 問題 1 でポテンシャルが十分深く広いとき、$V_0, a \to \infty$ とみなし球 Bessel 関数の漸近形を用いることで、任意の l に対して束縛エネルギーの近似式を求めよ。

問題 7　《補充問題（磁気単極子)》
今、仮に磁気単極子が存在したとする。原点に強さ g の点状磁気単極子があるとすると、この磁気単極子が作る磁場は次のように書ける

$$\mathbf{B} = \frac{g}{r^3}\mathbf{r}. \tag{12}$$

この磁場を与えるベクトルポテンシャルは極座標表示で次のように書ける

$$\mathbf{A}_N = \frac{g(1-\cos\theta)}{r\sin\theta}\mathbf{e}_\phi, \tag{13}$$

$$\mathbf{A}_S = -\frac{g(1+\cos\theta)}{r\sin\theta}\mathbf{e}_\phi. \tag{14}$$

ただし、$\mathbf{A}_N$ は $\theta = \pi$ で、$\mathbf{A}_S$ は $\theta = 0$ で特異点を持つのでそれぞれのベクトルポテンシャルはこれらの点では用ず、２つのベクトルポテンシャルによってすべての領域をカバーすることにする。このとき $\mathbf{A}_N - \mathbf{A}_S$ を計算することで、どのようなゲージ変換で２つのベクトルポテンシャルが結びつくか求めよ。それを用いて波動関数が一値関数であるという要請により、$\frac{2eg}{\hbar}$ が整数になる、つまり $g = \frac{\hbar}{2e}N$（N は整数）とかけることを示せ。これは仮に磁荷が存在したとすると、それは量子化していることを示している。
（以上）