

量子力学演習第二 第6回

担当：横山（本館 296）

2014年5月23日

講義ノートの3、4章の問題すべてをレポート問題にします。次回の授業時に提出してください。

問題1 《アルカリ原子》

アルカリ金属の原子の最外殻電子の感じるポテンシャルを以下のように近似する。

$$V = -\frac{e^2}{r} - \frac{Ae^2}{r^2}, \quad A > 0. \quad (1)$$

このときのエネルギー固有値を n, l を用いて表せ。 A は十分小さいとする。

問題2 《水素型原子》

水素型原子のハミルトニアン $H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} - \frac{Ze^2}{r}$ を考える。

(i) 以下の Kramers の漸化式が成り立つことを示せ。

$$Z^2 \left(\frac{k+1}{n^2} \right) \langle r^k \rangle - Z(2k+1)a_0 \langle r^{k-1} \rangle + k \left[\left(l + \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{k^2}{4} \right] a_0^2 \langle r^{k-2} \rangle = 0 \quad (2)$$

ここで a_0 は Bohr 半径、期待値 $\langle \dots \rangle$ は波動関数 R_{nl} に対するもので、 $k > -(2l+1)$ とする。

これを用い $\langle 1/r \rangle, \langle r \rangle, \langle r^2 \rangle$ を計算せよ。

(ii) 動径方向の確率密度は $r^2 R_{nl}^2$ で与えられる。 $l = n-1$ のとき、動径方向の確率密度が最大になる r の値を求めよ。水素原子の結果を用いてよい。

問題3 《3次元の束縛状態》

$l=0$ の状態について以下のポテンシャルに束縛された状態が $E=0$ の解を持つ条件を求めよ。

(i)

$$V = \begin{cases} \infty, & r < a, \\ -\frac{\alpha}{r^4}, & r > a \end{cases} \quad (3)$$

(ii)

$$V = -\frac{V_0 a^4}{(r^2 + a^2)^2}, \quad (4)$$

(iii)

$$V = \begin{cases} \infty, & r < a, \\ -\frac{\alpha}{r^s}, & r > a \end{cases}, \quad s > 2. \quad (5)$$

(以上)