

## 量子力学演習第二 第7回

担当：横山（本館 296）

2014年5月30日

### 問題1 《角運動量演算子》

角運動量演算子についての次の関係式が成り立つことを示せ ( $i = x, y, z$ )。

$$\mathbf{J}^2 = \frac{1}{2} (J_+ J_- + J_- J_+) + J_z^2, \quad (1)$$

$$[\mathbf{J}^2, J_i] = [\mathbf{J}^2, J_{\pm}] = 0, \quad (2)$$

$$[J_z, J_{\pm}] = \pm \hbar J_{\pm}, \quad (3)$$

$$[J_+, J_-] = 2\hbar J_z, J_{\pm} J_{\mp} = \mathbf{J}^2 - J_z (J_z \mp \hbar). \quad (4)$$

### 問題2 《角運動量演算子》

$j = 1$  のとき  $J_z$  の固有関数による  $J_x$  と  $J_y$  の行列表示を求め、それぞれの固有値、固有関数を計算し、行列を対角化するユニタリ行列を求めよ。

### 問題3 《Pauli 行列》

Pauli 行列について以下の式が成り立つことを示せ。  $\{i, j, k\} = \{1, 2, 3\}$ ,  $(x, y, z) = (1, 2, 3)$ 、 $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  とする。

$$\{\sigma_i, \sigma_j\} = 2\delta_{ij}, [\sigma_i, \sigma_j] = 2i\varepsilon_{ijk}\sigma_k. \quad (5)$$

$$(\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})(\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \boldsymbol{\sigma}, [a_0 + (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})]^{-1} = \frac{a_0 - (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma})}{(a_0)^2 - \mathbf{a}^2}. \quad (6)$$

(裏に続く)

**問題 4 《磁場中のスピン》**

磁気モーメント  $\boldsymbol{\mu}$  をもつ電子が磁束密度  $\mathbf{B}$  と相互作用している系を考える。 $\mathbf{n}$  を磁場の向きを表す単位ベクトルとするとハミルトニアンは以下のようにかける。 $\Delta$  は定数である。

$$H = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} = \Delta \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (7)$$

- (i) 磁場の向きを  $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$  とするとき、 $H$  の行列表示を書き下し、固有値、固有関数を求めよ。さらに、それぞれの固有関数についてスピン演算子  $\mathbf{S}$  の期待値を求めよ。  
 (ii) 磁場を  $z$  方向にかけた場合を考える。時刻  $t = 0$  でのスピン状態が正の固有値に対する固有関数  $\psi_+$  であるとき、任意の時刻におけるスピン状態を求め、スピン演算子  $\mathbf{S}$  の期待値を求めよ。  
 (iii) 磁場を  $z$  方向にかけて  $S_z$  を測定したとき  $\hbar/2$  であったとする。次に  $\mathbf{n} = (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta)$  方向に磁場をかけて測定を行ったとき、測定値が  $\hbar/2$  である確率を求めよ。また、スピンの状態が  $\psi_+$  状態のとき、磁場を  $z$  方向にかけた後の  $S_z$  の測定値とその確率を求めよ。

**問題 5 《補充問題 (角運動量演算子)》**

(i) 角運動量演算子について次の式を計算せよ。第 2 回の問題の結果を使うとよい。

$$e^{i\phi J_z/\hbar} J_x e^{-i\phi J_z/\hbar}, e^{i\phi J_z/\hbar} J_y e^{-i\phi J_z/\hbar}. \quad (8)$$

(ii) スピン 1/2 の時、 $J_i = \frac{\hbar}{2} \sigma_i$  と以下の式を用いて (i) の式を計算せよ：

$$\exp[i\alpha \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}] = \cos \alpha + i \sin \alpha (\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma}). \quad (9)$$

**問題 6 《補充問題 (逆行列)》**

正方行列  $A, B, C, D$  について以下の逆行列の式が成り立つことを示せ。

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

特に

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix} \quad (11)$$

である。以下の行列の逆行列を計算せよ。

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma} & \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ 0 & \mathbf{c} \cdot \boldsymbol{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

**問題 7 《補充問題 (電場中の核スピン)》**

原点に置かれたスピン 3/2 の原子核が外部から不均一な電場を受けているとき、その相互作用は以下のようにかける

$$H = C \left[ \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} S_x^2 + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} S_y^2 + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} S_z^2 \right]. \quad (13)$$

ここで  $C$  は定数とし、 $\phi$  は Laplace 方程式を満たすとする。このときハミルトニアンは次のように書くことができることを示し、その固有値を求めよ

$$H = \frac{A}{\hbar^2} (3S_z^2 - \mathbf{S}^2) + \frac{B}{\hbar^2} (S_+^2 + S_-^2). \quad (14)$$

(以上)