# 量子力学演習第二　第8回

担当：横山（本館 296）

2014 年 6 月 6 日

**問題 1**　《角運動量の合成》
(i) 角運動量演算子 $\mathbf{J}_1$、$\mathbf{J}_2$ の合成 $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2$ を考える。$\mathbf{J}$ の成分 $J_i$ $(i = x, y, z)$ について以下の交換関係を示せ。

$$\left[\mathbf{J}_1^2, J_i\right] = \left[\mathbf{J}_2^2, J_i\right] = 0. \tag{1}$$

(ii) 以下の交換関係を計算せよ。

$$\left[J_z, J_{1z}\right],\ \left[J_z, J_{2z}\right],\ \left[\mathbf{J}^2, J_{1z}\right],\ \left[\mathbf{J}^2, J_{2z}\right]. \tag{2}$$

**問題 2**　《スピン間の相互作用》
以下のハミルトニアンで表される 2 つのスピン 1/2 の相互作用を考える。

$$H = \frac{J}{\hbar^2}\mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{S}_2. \tag{3}$$

次の 4 つのスピン状態を基底に取りハミルトニアンを行列で表せ : $\left|\uparrow\right\rangle\left|\uparrow\right\rangle, \left|\uparrow\right\rangle\left|\downarrow\right\rangle, \left|\downarrow\right\rangle\left|\uparrow\right\rangle, \left|\downarrow\right\rangle\left|\downarrow\right\rangle$。行列を対角化し、固有値、固有関数を求めよ。

**問題 3**　《スピン軌道相互作用》
粒子の軌道角運動量 $\mathbf{L}$ とスピン角運動量 $\mathbf{S}$ の合成を $\mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{S}$ とおく。このとき次の式が成り立つことを示せ。

$$\left[\mathbf{L}^2, \mathbf{L}\cdot\mathbf{S}\right] = \left[\mathbf{S}^2, \mathbf{L}\cdot\mathbf{S}\right] = \left[J_z, \mathbf{L}\cdot\mathbf{S}\right] = 0. \tag{4}$$

**問題 4**《Paschen-Back 効果》
軌道角運動量 $l = 1$ とスピン角運動量 $s = 1/2$ の間にスピン軌道相互作用があり、$z$ 方向に磁場 $B$ がかかっている系のハミルトニアンは以下のようにかける。

$$H = \zeta\mathbf{L}\cdot\mathbf{S} + \frac{\mu_B B}{\hbar}\left(L_z + 2S_z\right) \equiv \frac{2a}{\hbar^2}\mathbf{L}\cdot\mathbf{S} + \frac{b}{\hbar}\left(L_z + 2S_z\right). \tag{5}$$

このハミルトニアンを次の基底を用いて行列表示せよ : $\left|1, m\right\rangle\left|\sigma\right\rangle, m = 1, 0, -1, \sigma = \uparrow, \downarrow$。また、エネルギー固有値を求め、$b/a$ の関数として図示せよ。この磁場による効果を Paschen-Back 効果と呼ぶ。

**問題 5**　《補充問題》
問題 2 を 2 つのスピン角運動量を合成することにより解け。

（裏に続く）

**問題 6**　《補充問題（Pauli 行列）》
2×2 の行列 $A$ を以下のように Pauli 行列で表す。

$$A = a_0 + (\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\sigma}). \tag{6}$$

この時、
(i)$A$ が Hermite であるための条件を求めよ。また、任意の 2×2 の Hermite 行列がこのようにかけることを示せ。
(ii)$A$ が SU(2) の元であるための条件を求めよ。また、任意の 2×2 の SU(2) 行列がこのようにかけることを示せ。

**問題 7**　《補充問題（Pauli 行列、構造定数）》
(i) $U$ が SU(2) の元であり、無限に小さいスカラー量 $\varepsilon$ を用いて次のようにかけるとする：

$$U = 1 + \varepsilon A. \tag{7}$$

このとき行列 $A$ の満たす条件を求めよ。$A$ は $R_i = -\frac{i}{2}\sigma_i (i = 1, 2, 3)$ を基底として表せることを示せ。また、次の関係式を満たす $f_{ijk}$ を構造定数と呼ぶ：

$$[R_i, R_j] = f_{ijk} R_k. \tag{8}$$

上で定義した $R_i$ に対する構造定数を求めよ。
(ii) SO(3) 行列についても同様の問題を考える。SO(3) の元 $U$ が $U = 1 + \varepsilon A$ とかけるとき、行列 $A$ の満たす条件を求め、$A$ は次の $R_i(i = 1, 2, 3)$ を基底として表せることを示せ。

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ R_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ R_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

また、$R_i$ に対する構造定数を求めよ。

**問題 8**　《補充問題（Pauli 行列）》
2 つの核子の間のポテンシャルは次のようにかける：

$$V = 3(\boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{r})(\boldsymbol{\sigma}_2 \cdot \boldsymbol{r})/r^2 - \boldsymbol{\sigma}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_2. \tag{10}$$

この時、$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_1 + \boldsymbol{\sigma}_2$ を用いてポテンシャルを表せ。

**問題 9**　《補充問題（軌道角運動量の消失）》
磁場がなく（時間反転対称性が破れていない）Hamiltonian のある固有状態に縮退がない時、その状態における軌道角運動量の期待値が 0 になることを示せ。

（以上）