量子力学演習第二　第9回

担当：横山（本館 296）

2014 年 6 月 13 日

問題 1　《角運動量の合成》
2 つの電子のスピン $(s = 1/2)$ の角運動量を合成せよ。

問題 2　《角運動量の合成、超微細相互作用》
原子核に核スピン $\mathbf{I}$ があるとき、s 軌道の電子スピンとの間に超微細相互作用が働く：

$$H = \frac{A}{\hbar^2}\mathbf{I}\cdot\mathbf{S} \tag{1}$$

角運動量の合成を $\mathbf{J} = \mathbf{I} + \mathbf{S}$ とし、以下 $I = 3/2$、$s = 1/2$ の場合を考える。このとき、$\mathbf{J}^2$ と J_z の同時固有状態を作り、ハミルトニアンの固有値、固有関数を求めよ。

問題 3　《スピンの回転》
(i) $|1,m\rangle$ $(m = 1,0,-1)$ の張る空間で $e^{-i\theta L_y/\hbar}$ を行列表示せよ。それを用いて次の式を計算し、$|1,m\rangle$ $(m = 1,0,-1)$ の線形結合で示せ：

$$e^{-i\theta L_y/\hbar}\,|1,1\rangle\,. \tag{2}$$

(ii) 2 つのスピン 1/2 の角運動量の合成を考える：$\mathbf{S} = \mathbf{S}_1 + \mathbf{S}_2$。このとき y 軸周りの回転は次のようにかける：$e^{-i\theta S_y/\hbar} = e^{-i\theta S_{1y}/\hbar}e^{-i\theta S_{2y}/\hbar}$。このとき以下の式を計算し、(i) と同様の式を導け：

$$e^{-i\theta S_y/\hbar}\,|1,1\rangle = e^{-i\theta S_{1y}/\hbar}\,|\uparrow\rangle \otimes e^{-i\theta S_{2y}/\hbar}\,|\uparrow\rangle\,. \tag{3}$$

また、次の状態が $e^{-i\theta S_y/\hbar}$ のもとで不変であることをしめせ：

$$|0,0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\uparrow\rangle|\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle|\uparrow\rangle\right). \tag{4}$$

問題 4　《2 電子系の Pauli 行列》
2 つの電子のスピンからなる系を考え対応する Pauli 行列を $\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2$ で表すとする。以下では問題 1 の結果を援用してよい。
(i) $\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2$ の固有値を求めよ。
(ii) $(\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2)^2$ を $\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2$ の 1 次式で表せ。
(iii) 次のハミルトニアンの固有値を求めよ。係数の a, b などは実数とする。

$$H = a(\sigma_{1z} + \sigma_{2z}) + b\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2, \tag{5}$$
$$H = a\sigma_{1z}\sigma_{2z} + b\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2, \tag{6}$$
$$H = a_1\sigma_{1z} + a_2\sigma_{2z} + b\boldsymbol{\sigma}_1\cdot\boldsymbol{\sigma}_2. \tag{7}$$

問題 5　《補充問題（角運動量の合成）》
(i) 電子の軌道角運動量 (量子数を l とする) とスピン角運動量を合成せよ。
(ii) スピンが $s = 1$ の粒子の軌道角運動量 (量子数を l とする) とスピン角運動量を合成せよ。

（裏に続く）

問題 6　《補充問題（SU(2) ゲージ場）》
時間、空間的に変動するスピンと相互作用する電子を考える。ハミルトニアンは以下のようにかけるとする。$\mathbf{n}$ が時間、空間的に変動するスピンを表す。

$$H = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 + \Delta\mathbf{n}(\mathbf{r},t)\cdot\boldsymbol{\sigma}. \tag{8}$$

このとき $\mathbf{n}(\mathbf{r},t)\cdot\boldsymbol{\sigma}$ を対角化するユニタリ行列 U を用いて Schrödinger 方程式 $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = H\psi$ は $i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\tilde{\psi} = \tilde{H}\tilde{\psi}, \tilde{\psi} = U^\dagger\psi$,

$$\tilde{H} = U^\dagger HU - i\hbar U^\dagger\frac{\partial}{\partial t}U = -\frac{\hbar^2}{2m}\left(\nabla + i\mathbf{A}\right)^2 + \Delta\sigma_z + \hbar A_0 \tag{9}$$

のように変換されることを示せ。これは変換された座標系では電子はゲージ場中で時間、空間的に一様なスピンと相互作用していることを示している（ただし、A_μ は 2×2 行列）。さらに $U = \mathbf{m}\cdot\boldsymbol{\sigma}$（$\mathbf{m}$ は実単位ベクトルで $\mathbf{n}$ の関数）とするとき A_μ を $\mathbf{m}$ と Pauli 行列を用いて表せ。

問題 7　《補充問題（Dirac 電子の Landau 準位）》
炭素一層からなるグラフェンと呼ばれる物質などさまざまな系で電子が次の Dirac 方程式に従うことが知られている：$H = v\left(p_x\sigma_x + p_y\sigma_y\right)$。ここで σ は Pauli 行列である。z 方向に一様な磁場 B をかけるとする。この時ハミルトニアンは

$$H = v\left(\pi_x\sigma_x + \pi_y\sigma_y\right), \tag{10}$$

$\pi_i = p_i + eA_i (i = x, y)$ とかける。$\pi_\pm = \pi_x \pm i\pi_y$ と置くとき、$\pi_\pm$ を用いてハミルトニアンを表せ。さらに昇降演算子を次のように定義し

$$a = \frac{1}{\sqrt{2\hbar eB}}\pi_-,\ a^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2\hbar eB}}\pi_+ \tag{11}$$

調和振動子のときと同様にエネルギー準位をもとめよ。また、H^2 を計算することでエネルギー準位を求めよ。

問題 8　《補充問題（３次元の調和振動子）》
３次元の等方的調和振動子を角運動量演算子を用いて考察してみる。まずハミルトニアンは次のようにかける

$$H = \hbar\omega\left(N + \frac{3}{2}\right), \tag{12}$$

$$N = a_i^\dagger a_i,\ x_i = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_i + a_i^\dagger),\ p_i = -i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a_i - a_i^\dagger), \tag{13}$$

$i = 1,2,3 = x,y,z, x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z.$ いま、角運動量演算子を $a, a^\dagger$ で次のように表す：$J_i = \varepsilon_{ijk}x_j p_k = i\hbar\varepsilon_{ijk}a_j a_k^\dagger$。演算子 A を $A = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$ と定義する。このとき次の式が成り立つことを示せ。

$$[J_i, A] = \left[\mathbf{J}^2, A\right] = 0,\ [N, A] = -2A,\ \mathbf{J}^2 = \hbar^2\left[N(N+1) - A^\dagger A\right]. \tag{14}$$

これにより、A と $A^\dagger$ は $\mathbf{J}^2$ の固有値を変えず、N の固有値を２ずつ変化させることがわかる。N の固有値を n として、状態を $|njm\rangle$ とかく（j, m は角運動量の量子数）。N の最少値 $n = n_{min}$ で $A\,|n_{\min}jm\rangle = 0$ が満たされることから、n_{min} の値を求め、エネルギー固有値を求めよ。第３回の問題１の結果と比較してみよ。

問題 9　《補充問題（Bloch ベクトル）》
今、2 成分の波動関数

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \tag{15}$$

に対して、ρ を以下のように定義する：

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} |c_1|^2 & c_1c_2^* \\ c_2c_1^* & |c_1|^2 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

$|\psi\rangle$ は規格化されているとする：$\langle\psi \mid \psi\rangle = 1$。$\rho$ を以下のように書くとき

$$\rho = \frac{s_0}{2} + \frac{1}{2}\mathbf{s}\cdot\boldsymbol{\sigma},\ \mathbf{s} = (s_1, s_2, s_3) \tag{17}$$

$s_i\ (i = 0,1,2,3)$ を求めよ。また、$\rho^2 = \rho,\ \mathbf{s}^2 = 1$ が成り立つことを示せ。$|\psi\rangle$ が運動方程式 $i\hbar\frac{d}{dt}|\psi\rangle = H|\psi\rangle$ に従うとすると、ρ に対する運動方程式は以下のようにかけることを示せ。

$$i\hbar\frac{d}{dt}\rho = [H, \rho]. \tag{18}$$

また、H が $H = \frac{\hbar}{2}\mathbf{\Omega}\cdot\boldsymbol{\sigma}$ とかけるとき、$\mathbf{s}$ の従う運動方程式を求めよ。$\mathbf{s}$ は Bloch ベクトルと呼ばれる。

（以上）